Prof. **A. Kaufmann**

Ing. **G. Desbazeille**

METODA DRUMULUI CRITIC

Aplicarea metodei PERT şi a variantelor sale
la programele de producjie şi de învăjămînt

Traducere din limba franceză, după edijia a doua

Editura **tehnică**

Bucureşti — 1971

Traducere şi control ştiinţific:
prof. Gavrll Sâmboan şi dr. loan Tomescu

Redactor: Valentina Bucur

Tehnoredactor: Vaieriu Morărescu

Coperta şi supracoperta: Valentin Vişan

La mâthode du chemin critique par A. Kaufmann et G. Desbazeille
© Dunod, Paris, 1969

CUVÎNT ÎNAINTE

Iată o lucrare foarte utilă, care vine la timp şi căreia îi dorim **o** foarte largă popularitate. Curiozitatea şi interesul trezite aproape pretutindeni în lume de sistemul PEET sau metoda drumului critic („Criticai Path Scheduling“) în cursul ultimilor ani se bazează pe mai multe cauze. Sînt înclinat să cred că succesul ei se datorează în mare parte faptului că ea nu necesită, ca alte metode de cercetare operaţională, o formaţie matematică prealabilă avansată şi că noţiunile la care apelează sînt destul de intuitive. De asemenea, ea se asimilează uşor şi, prin urmare, este accesibilă.

Bineînţeles, ar mai trebui ca această metodă să răspundă unor necesităţi reale şi adesea resimţite de toţi aceia care au de dus la bun sfîrşit realizarea unui proiect sau a unui mare ansamblu. Chiar aceasta este efectiv situaţia, deoarece insuficienţele diagramei clasice a lui Gantt au devenit flagrante. Lucrarea de faţă are, după părerea mea, un merit esenţial: acela de a fi în primul rînd practică.

După un prim capitol de recapitulări teoretice asupra teoriei grafurilor şi a problemelor de ordonanţare, autorii abordează noţiuni concrete şi fundamentale, ca antecedenţi şi descendenţi, timpi operatori, interval de fluctuaţie, margini (totale, libere, sigure), pe care practicienii nu vor avea nici o dificultate în a le identifica, referin- du-se la propria lor experienţă. Apoi urmează preţioasele exemple numerice datorită cărora algoritmii prezentaţi îşi pierd caracterul lor greoi. Nu am sfătui prea mult pe cititori să studieze amănunţit, cu creionul în mînă, exemplul concret împrumutat de la Pacaud, cu diferitele sale variante.

Intervenţia factorului aleator în duratele operaţiilor presupuse determinate iniţial se reduce în primele două capitole la raţio- narea pe timpi medii şi pe dispersii, care se adună, admiţîndu-se independenţa repartiţiilor şi existenţa nedeplasării în estimaţiile succesive.

Capitolul al treilea generalizează metoda PERT introducînd un model stochastic, care se aplică, în particular, cazurilor în care nu există nici o experienţă prealabilă, permiţînd stabilirea de grafuri perfect definite.

Capitolul al patrulea, tratînd optimizarea asociată duratelor şi costurilor, este cel mai dezvoltat şi cel mai pasionant.

în expunerea algoritmului lui Fulkerson se întîlneşte problema mai generală a programării liniare parametrice şi conceptul universal de dualitate. Dacă aspectul teoretic poate să pară puţin, greoi, trebuie ca cititorul, după o primă lectură, să încerce, înainte de a reveni, să urmărească pas cu pas exemplul din 4.9, care ocupă un loc important în lucrare şi constituie unul din elementele cheie. Cea mai mare parte a capitolului al patrulea tratează, desigur, optimizarea unui program cu durate fixate ale operaţiilor. Doar în ultimele pagini este schiţat un caz aleator, în care timpul operator mediu şi abaterea sa tip variază liniar în funcţie de cost, ceea ce constituie tot ce se poate face în această etapă mai rafinat şi mai aproape de o realitate intrinsec complexă. Cazurile mai speciale fac obiectul comunicărilor foarte recente ale specialiştilor, la toate congresele şi în toate revistele periodice de cercetare operaţională.

Această lucrare, aşa cum se prezintă, poate fi citită şi asimilată de cercul larg al celor interesaţi în aceste probleme. Sperăm ca lucrarea să ajute la o mai bună cunoaştere a importanţei şi a supleţei metodei PERT, a cărei notorietate este astăzi foarte mare. Astfel, în Statele Unite administraţia ia în considerare numai ofertele pentru executarea cărora candidatul prezintă un program de ordonanţare, conform acestei metode.

în încheiere, voi cita cîteva cuvinte ale directorului general al unei mari societăţi din Spania: ,,De cînd am aplicat recent metoda PERT pentru construirea unei clădiri industriale în uzina noastră, nu mai există nici un proiect nou care să nu facă obiectul stabilirii unui program PERT, în înţelegere strînsă între proiectanţi, inginerii constructori şi cercetătorii operaţionali. Dacă am fi cunoscut-o şi aplicat-o mai dinainte, în mod sigur am fi evitat multe ezitări,

manevre false, reproşuri între părţile interesate şi am fi cîştigat mult în timp, în bani şi în coeziunea inginerilor noştri“.

E. VENTURA
Director al Societăţii de studii aplicate in cercetarea operaţională

PREFAŢĂ

Printre metodele elaborate în ultimii ani cu scopul punerii în lucru şi al supravegherii executării programelor de producţie sau de cercetare, metoda drumului critic ocupă un loc de frunte, prin simplitatea şi eficacitatea sa precum şi prin bogăţia variantelor care se dezvoltă neîncetat. Fie că este vorba de metoda americană PERT, de metoda franceză a potenţialelor sau de diverse variante propuse cam peste tot, baza matematică a acestora este constituită de teoria grafurilor, ea însăşi o parte importantă a teoriei mulţimilor

Este necesar ca inginerii, organizatorii, planificatorii şi, în general, toţi cei care au responsabilităţi în elaborarea şi controlul programelor, să cunoască posibilităţile oferite de metoda drumului critic. Trebuie să arătăm că această metodă nu este universală şi că multe probleme nu pot fi rezolvate cu ajutorul ei; pe măsură ce se descoperă şi se introduc noi metode de ordonanţare şi de planificare, se descoperă că apar noi probleme care necesită algoritmi diferiţi sau mai perfecţionaţi. Structurile lumii moderne se complică din zi în zi şi metodele ştiinţifice devin indispensabile pentru orientarea în acest gen de dificultăţi combinatorii, în cazul activităţilor mici, mijlocii sau mari. în unele ţări metoda PERT este utilizată chiar în întreprinderile mici; cît despre marile întreprinderi, acestea au servicii speciale cu sarcina de a aplica adesea cu ajutorul unor calculatoare electronice puternice, procedeele bazate pe această metodă. Sînt numai cîţiva ani de cînd sistemul

PERT (Program Evaluation Research Task) a fost utilizat pentru realizarea programului de cercetare şi de construire a cunoscutelor rachete Polaris; drumul parcurs de atunci este considerabil şi nu mai există un număr al unei reviste de cercetare operaţională sau de gestiune ştiinţifică care să nu cuprindă cel puţin un articol asupra acestui subiect, în care să nu fie propusă o nouă dezvoltare.

Propunem cititorilor acestei lucrări să continuie studierea problemelor de ordonanţare consultînd bibliografia existentă foarte bogată, atît asupra aspectelor teoretice, cit şi asupra celor practice, care îi interesează. Din aceste eforturi vor rezulta importante economii de timp şi de bani.

Cadrul în care se plasează activităţile omeneşti ale timpului nostru nu este numai spaţial sau numai temporal; el este alcătuit din coordonate de spaţiu şi de timp, unde totul este mişcare şi adaptare. Matematicienii şi inginerii ne dau posibilităţile navigării în acest cadru. Să nu le îndepărtăm prin vanitatea intuiţiei noastre, intuiţie preţioasă, dar pe care trebuie să o ajutăm şi să o amplificăm prin procedee de investigaţie convenabile.

A. KAUFMANN şi G. DESBAZEILLE

GRAFURI SI ORDONANTARE

1.1. INTRODUCERE

Fără a face abuz de aspecte teoretice relative la cercetarea relaţiilor ordinale ale unui graf, acesta nefiind altceva, după cum vom vedea, decît o mulţime de elemente între care există legături orientate, credem că este potrivit să amintim anumite noţiuni din teoria grafurilor şi să arătăm cum se utilizează diverse procedee care permit realizarea unor relaţii ordinale. Ne vom limita la ceea ce este esenţial pentru un studiu al procedeelor de ordonanţare care intervin în metoda drumului critic.

Vom defini mai întîi noţiunile de vîrf, arc, drum, circuit etc., apoi vom introduce noţiunea de ordine. Scopul acestui studiu preliminar este de a ne învăţa să căutăm în ce ordine pot fi realizate operaţii despre care ştim numai că unele trebuie să le preceadă pe altele. .

1.2. NOŢIUNEA DE GRAF

Să considerăm o mulţime de elemente în număr finit, pe care le vom nota cu literele A_1; X_2,.. ., X_n, mulţimea *) însăşi notînd-o prin litera X, şi vom scrie simbolic :

---

* **Ne ocupăm aici numai de grafuri care au un număr finit de elemente; teoria grafurilor se ocupă şi de cazul grafurilor care au un număr infinit de elemente.**

$$X = \{A_n\ X_2,\ldots,X_n\}. \quad (1.1)$$

Dacă fiecărui element din mulţimea X îi corespund zero, unul sau mai multe elemente din X, se va forma, în sensul teoriei mulţimilor, un *graf.* Numind T legea care reprezintă corespondenţa considerată, vom utiliza pentru a reprezenta un graf simbolul

$$G = (X, f). \qquad (1.2)$$

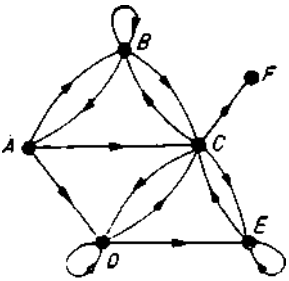


Fig. 1.1

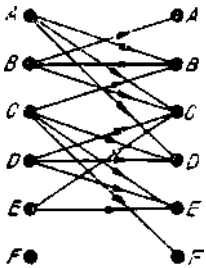


Fig.

0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabelul 1.1

A B C D E F

Să considerăm un exemplu pentru a ilustra această definiţie, «are ne va părea întrucîtva puţin mai abstractă. Fie o mulţime de .şase elemente
şi să considerăm legea următoare de corespondenţă definită prin simbolul T :

T2 = *{B, C, D}, rB = {A, B, C}, TE, = [B, D, E, F}.*

VD = {C, D, E}, TE = {C, E}, TF =0,

unde simbolul 0 reprezintă mulţimea vidă care joacă în teoria mulţimilor rolul lui zero din numeraţie.

Un graf se poate reprezenta cu ajutorul unui desen ca acela ■din fig. 1.1, care se numeşte *reprezentarea sagitală a grafului*; el se poate reprezenta de asemenea ca în fig. 1.2, sau cu ajutorul unui tabel — matrice (tabelul 1.1).

în teoria mulţimilor se numeşte *graf* orice aplicaţie a unei mulţimi în ea însăşi; simbolul T reprezintă această aplicaţie. †)

Vîrf

Un element al unei mulţimi care formează un graf se numeşte -*vîrf.* Pe fig. 1.1 elementele *A, B, C, D, E* şi *F* sînt vîrfurile grafului. Un vîrf este numit de unii autori şi *punct.*

Arc

O pereche orientată (X., X,- se numeşte *arc.* Astfel, în fig. 1.1: *(A, B), (B, A),* (A, (7), *(E, E), (C, F)* sînt arce.

Se va nota prin U mulţimea arcelor; în exemplul dat avem :

$$\mathbf{U} = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, A), (B, B), (B, C), (C, B), (C, JD), (C, E), (C, F), (D, C), (D,D), (D, E), (E, C), (E, E)\}. \quad (1.5)$$

Un graf poate fi notat prin

$$\mathbf{u = (X, r)}$$

sau prin

$$G = \mathbf{(X, U).}$$

† **Un graf este de fapt o pereche (X, T) unde X este o mulţime de elemente numite vîrfuri, iar T este o aplicaţie de la X In mulţimea părţilor lui X (N.R.).**

Drum,

Este o succesiune de arce adiacente care permit să se treacă de la un vîrf la altul; astfel (A, *B, C, F),* (A, C, *D, E, C, F),* (A, *B,* A), (A, *D),* (A, *B, B, C)* sînt drumuri (fig. 1.1).

Circuit

Este un drum al cărui vîrf iniţial coincide cu vîrful final. Astfel *(A,C, B,* A), *(A,C,B,A,C,B,A), (A,B,A), (B, B)* sînt circuite (fig. 1.1).

Buclă

Este un arc pentru care originea şi extremitatea coincid; *(B, B)*$_f$ *(D, D)* şi *(E, E)* sînt bucle (fig. 1.1).

Lungimea unui drum sau a unui circuit

Este numărul arcelor unui drum sau ale unui circuit. Astfel, lungimea drumului *(A, B, C,F)* este 3, aceea a circuitului *(A, D, E*$_y$ *C, B, A)* este 5.

Muchie

Cînd două vîrfuri distincte sînt unite prin cel puţin un arc în- tr-un sens şi în altul, se spune că între ele există o muchie. Astfel, noţiunea de muchie este o noţiune *neorientată* a grafului.

De exemplu, în fig. 1.1 : între *A* şi *D* există o muchie; între *A* şi *B* există o muchie; nu există muchie între *B* şi *D.*

O muchie se va nota (A, *D)* sau (A, *B)*; mulţimea muchiilor se va nota prin U. Astfel, în exemplul nostru (fig. 1.1) :

U = ((Â7B), (Ă^), (Ă^D), *(B^C), (CJ)}, (CTE), (CŢF), (&E)}.* (1.6)

Lanţ

Este o succesiune de muchii adiacente, adică o succesiune, de arce adiacente unde nu ţinem seama de orientarea arcelor. Astfel,

pe fig. 1.1 : *(B, C, A, D, E)* nu este un drum (din cauza arcului *AC),* însă este un lanţ. Orice drum este evident şi un lanţ; însă, reciproc, după cum am văzut, un lanţ nu este totdeauna un drum .

Graf conex

Un graf este *conex* dacă între orice pereche de vîrfuri ale grafului există cel puţin un lanţ. Graful din fig. 1.1 este conex.

Un graf este *tare conex* dacă între oricare pereche de vîrfuri există cel puţin un drum. Graful din fig. 1.1 nu este tare conex (nu există drumuri de la *F* către celelalte vîrfuri).

Graf antisimetric

Să considerăm mulţimea U a arcelor grafului ; dacă pentru orice arc (X_4, X,) aparţinînd lui U arcul (X,,Xj) în sens invers nu aparţine lui U, se spune că graful este *antisimetric.*

Rezultă din această definiţie că un graf antisimetric nu are bucle. De exemplu, graful din fig. 1.3 este antisimetric.

Graf fără circuite

în prezenta lucrare ne vom o- cupa în special de grafuri fără circuite, adică neconţinînd nici un circuit, aşa cum este cazul grafului din fig. 1.3.

Este evident că orice graf fără circuite este antisimetric, însă reciproca nu este adevărată.

Cititorul care cunoaşte teoria grafurilor va fi uimit de faptul că ne limităm la aşa de puţine lucruri dintr-o teorie atît de amplă; am

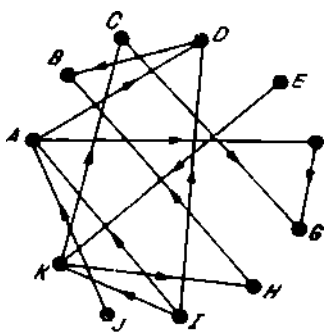


Fig. 1.3

amintit numai ceea ce este strict necesar pentru o prezentare logică a conceptelor pe care le vom introduce în metoda drumului critic, obiectul acestei cărţi.

Tabelul 1.2

Matricea corespunzătoare grafului reprezentat in fig. 1.3. Zerourile nu au fost trecute în această matrice

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A				1		1					
B											
C							1				
D		1									
E											1
F							1				
G											
H		1									
I	1			1							1
J	1										
K			1					1			

1.3. RELAŢIA DE ORDINE STRICTĂ ÎNTR-UN GRAF CONEX FĂRĂ CIRCUITE

Să considerăm relaţia următoare între două vîrfuri distincte X_4 şi Xj ale unui graf conex fără circuite : *există un drum de lungime nenulă de la* X_t *spre* X,, pe care o vom nota $X_4 <$ Xj.

Această relaţie are următoarele proprietăţi :

1) Relaţia este antisimetrică; $X_t <$ X, implică că nu putem avea Xj < Xj deoarece ar exista un circuit.

2) Relaţia este tranzitivă; dacă Xj < *Xj* şi *Xj* < X_k, atunci Xj < ceea ce este evident, dacă considerăm definiţia unui drum.

în acest mod, în orice graf conex şi fără circuite este posibil să se considere o relaţie de ordine strictă, plecînd de la proprietatea : există un drum de la $X_($ spre X,; Xj se

numeşte *antecedent* al lui X_j şi *Xj* se numeşte *descendent* al lui $X_{,}$, dacă există un drum de la $X_{(}$ la *Xj.*

Exemplu (fig. 1.3)

1 este un antecedent al lui *B : I < B.*
G este un descendent al lui Z : *I < G.*

Ne vom ocupa acum de următoarea problemă particulară, însă foarte importantă: să se împartă vîrfurile unui graf conex şi fără circuite în nivele‡) plecînd dintr-un vîrf arbitrar astfel ca :

a) toate elementele aceluiaşi nivel să nu aibă antecedenţă în nivelul următor; elementele primului nivel să nu aibă antecedenţă şi cele ale ultimului nivel să nu aibă descendenţi;

b) ordinea vîrfurilor din acelaşi nivel să fie indiferentă, adică aceste vîrfuri să nu fie legate între ele prin arce.

Pentru orice vîrf considerat, descompunerea în asemenea nivele există întotdeauna. Metoda folosită pentru determinarea lor ne va dovedi acest lucru mai departe.

1.4. DESCOMPUNEREA UNUI GRAE CONEX FĂRĂ CIRCUITE ÎN NIVELE

1.4.1. CUM SE ORDONEAZĂ NIVELELE

Să reluăm exemplul din fig. 1.3 : este posibil să fie descompus graful, astfel încît să apară patru nivele (fig. 1.4), fiecare nivel con- ţinînd vîrfuri care nu au între ele nici un arc; cum a fost obţinut acest rezultat? Vom prezenta două metode.

Prima metodă §)

---

‡ **Aceste nivele definesc valorile unei funcţii ordinale a grafului. în mod intenţionat lăsăm la o parte aici noţiunea de funcţie ordinală ; ea l-ar antrena pe cititor spre un studiu mai aprofundat al teoriei grafurilor, In mod disproporţional cu obiectivele prezentei lucrări.**

§ **Această metodă este datorată lui Demoucron, inginer la Compania de maşini Bull.**

Să considerăm matricea care reprezintă graful din fig. 1.3, matrice reprezentată prin tabelul 1.2. Să notăm V_A, V_B, V_C,..., V_K vectorii care reprezintă coloanele acestei matrice. Să calculăm :

$$K = V_A + V_B + ... + V_K$$

şi să trecem acest rezultat în dreapta matricei, aşa cum ne arată
tabelul 1.3. Acest vector V_o conţine un anumit număr de zerouri

Tabelul 1.3

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	$\vec{V}_0$	$\vec{V}_1$	$\vec{V}_2$	$\vec{V}_3$
A				1		1						2	2	0	×
B												0	×	×	×
C							1					1	0	×	×
D		1										1	0	×	×
E											1	1	1	1	0
F							1					1	0	×	×
G												0	×	×	×
H		1										1	0	×	×
I	1			1							1	3	3	2	0
J	1											1	1	1	0
K			1					1				2	2	0	×
Nivelul												0	1	2	3
Vîrfurile												*B* *G*	*C* *D* *F* *H*	*A* *K*	*E* *I* *J*

şi anume două, care corespund vîrfurilor *B* şi *G,* ceea ce înseamnă că aceste două vîrfuri nu au descendenţi: ele vor fi de nivel 0.

Acum să calculăm vectorul

$$= v_0 - v_B - v_o,$$

în care vor apărea patru zerouri noi, corespunzînd vîrfurilor *C, D, F, H,* care vor fi numite de nivel 1.

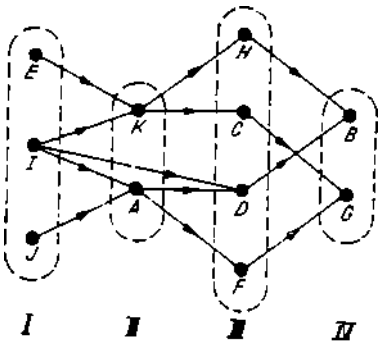


Fig. 1.4

Apoi să calculăm

$$v_2 = \quad - v_c - V_D - V_F - v_{,,}$$

unde apar două zerouri noi, corespunzînd vîrfurilor *A* şi *K,* care se vor numi de nivel 2.

în fine, să calculăm

$$v_3 = v_2 - v_A - V_K,$$

unde apar trei zerouri noi, corespunzînd vîrfurilor *E, I* şi *J,* care se vor numi de nivel 3. Ne vom opri aici, deoarece V_3 nu este format decît din zerouri.

Pentru a demonstra proprietatea utilizată, este suficient să remarcăm că în fiecare etapă de calcul se caută vîrfurile

fără des- cendenţi [**]).

O numerotare în sens invers va da ordinea I, II, III şi IV, reprezentată în fig. 1.4.

La fel de bine se poate lua transpusa [††]) matricei date de tabelul 1.3 şi să se procedeze în sens invers, căutînd vîrfurile care nu au antecedenţă. Vom găsi o altă mulţime de nivele, care poate fi aceeaşi în anumite cazuri particulare, ca aceea obţinută căutînd vîrfurile care nu au descendenţi.

Alt exemplu

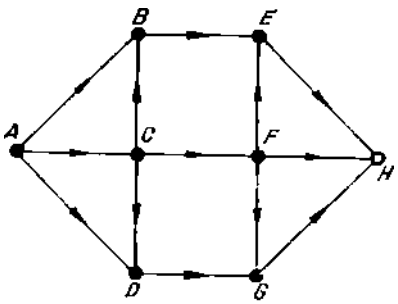


Fig. 1.5

Fie graful din fig. 1.5. în tabelul 1.4. a fost trecută mai întîi matricea care reprezintă acest graf, apoi s-a calculat succesiv :

$$V_o = V_A + V_B + \bullet\ \bullet\ \bullet + V_E,$$

$$= V_o - V_B,$$

** **în calculele făcute cu ajutorul unui echipament electronic, este convenabil să se plaseze cifra 1 pe diagonala principală a matricei booleene pentru a distinge zerou- rile de x ; zerourile devin atunci unităţi şi x devin zerouri.**

†† **Adică matricea obţinută permutind liniile cu coloanele de acelaşi indice.**

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{V}_E - \vec{V}_C,$$

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_2 - \vec{V}_B - \vec{V}_D - \vec{V}_F,$$

$$\vec{V}_4 = \vec{V}_3 - \vec{V}_C.$$

Tabelul 1.4

	A	B	C	D	EF		GH		V_i	r_i	→	Z	→ n
A		**1**	**1**	**1**					**3**	**3**	**3**	**1**	**0**
B					**1**				**1**	**1**	**0**	**x**	**x**
C		**1**		**1**		**1**			**3**	**3**	**3**	**0**	**x**
D							**1**		**1**	**1**	**0**	**x**	**x**
E								**1**	**1**	**0**	**x**	**x**	**x**
F					**1**		**1**	**1**	**3**	**2**	**0**	**x**	**x**
G								**1**	**1**	**0**	**x**	**x**	**x**
H									**0**	**x**	**x**	**x**	**x**
Nivelul .									**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Vîrfurile									***H***	***E G***	***B D F***	**C**	**A**

Cele cinci nivele obţinute sînt reprezentate în fig. 1.6.

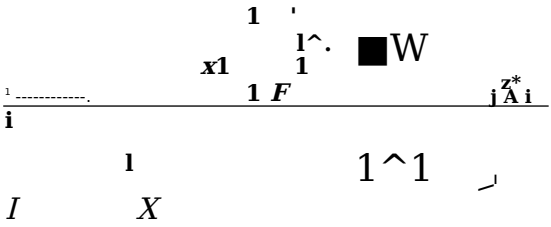


Fig. 1.6

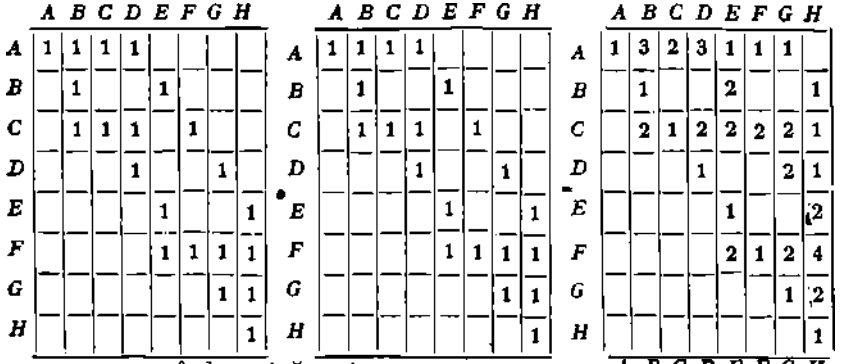
Metoda a doua

Pentru explicarea acestei metode vom defini mai întîi *închiderea tranzitivă a unui vîrf al unui graf.*

Se numeşte închidere tranzitivă a unui vîrf X_i al unui graf submulţimea vîrfurilor grafului, inclusiv X_i însuşi, pentru care există un drum de la X_i către fiecare din ele. Dacă considerăm de exemplu, pe fig. 1.3 vîrful *K,* închiderea tranzitivă a lui *K* este *(K, H, C, B, G}.*

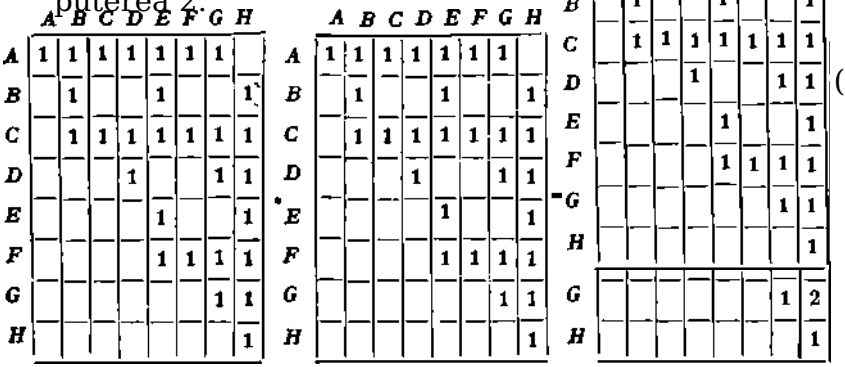
Pentru obţinerea închiderii tranzitive a fiecăruia dintre vîrfurile unui graf se consideră matricea sa reprezentativă, la care se vor adăuga în prealabil unităţi pe diagonala principală şi o vom înmulţi cu ea însăşi după regulile obişnuite ale calculului matriceal apoi, în matricea obţinută se înlocuiesc toate numerele mai mari sau egale cu 1 prin 1 şi nu se modifică zerourile obţinute. Această matrice ne indică vîrfurile care sînt legate cu altele printr-un drum de lungime 0, 1 sau 2. O vom înmulţi la rîndul ei prin ea însăşi şi numerele mai mari sau egale cu 1 vor fi înlocuite prin 1; ea ne va da vîrfurile care sînt legate cu celelalte printr-un drum de lungime inferioară sau egală cu 4. Se va continua pînă ce nu mai apar noi cifre egale cu 1; astfel se va găsi matricea care dă închiderea tranzitivă a fiecărui vîrf.

înainte de a trece la etapa a doua de calcul, să arătăm cum se lucrează pe un exemplu. Să-l reluăm pe acela din fig. 1.5; nu vom reprezenta zerourile şi vom lăsa căsuţele lor goale.



înlocuită prin

Matricea (1.8) va fi ridicată, la rîndul său, la puterea 2.



(1.8)

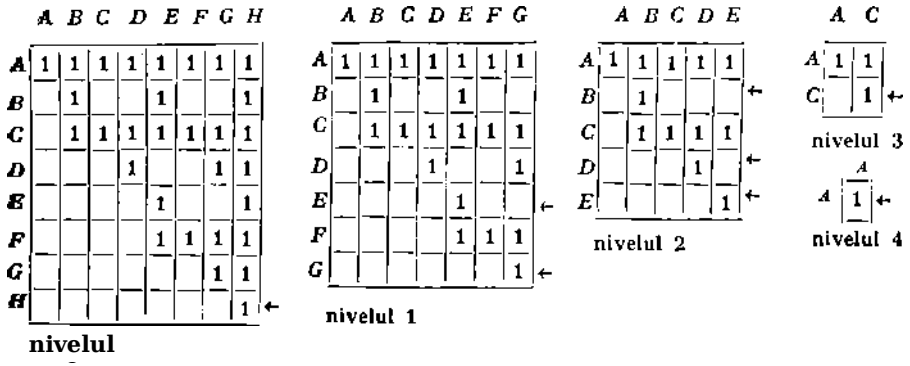
înlocuită prin

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	1	1	1	1	1	1	1	1
B		1			1			1
C		1	1	1	1	1	1	1
D				1			1	1
E					1			1
F					1	1	1	1
G							1	1
H								1

(1.10)

Matricea (1.10) va fi ridicată, la rîndul său, la puterea 2; însă vom constata, înlocuind numerele mai mari sau egale cu 1 prin unităţi, că regăsim (1.10). Această matrice dă închiderea tranzitivă a fiecărui vîrf (se putea evalua prin citire directă pe graf, însă pentru anumite grafuri mai complicate se vor întîmpina cu siguranţă unele dificultăţi, pentru a se putea opera prin citire directă).

Acum, în matricea care dă închiderea tranzitivă, vom căuta liniile care conţin numai un singur 1; elementele corespunzătoare vor fi numite de nivel 0. Liniile şi coloanele care corespund elementelor de nivel zero vor fi eliminate şi se va repeta pe submatricea obţinută prin eliminarea liniilor şi coloanelor care conţin un singur număr 1, ş.a.m.d.



Săgeţile indică elementele nivelului considerat.

Justificarea metodei folosite este evidentă. La fiecare iteraţie se elimină vîrfurile fără descendenţi. Această metodă este mai complicată decît prima, ea justificîndu-se cînd calculele închiderii tranzitive sînt simple.

1.4.2.DETERMINAREA NIVELELOR PE DESENUL UNUI GRAF

Calculele prezentate în legătură cu cele două metode date mai înainte pot fi făcute direct pe desenul grafului, ceea ce este uneori mai comod.

Să examinăm pe un exemplu cum se operează (fig. 1.7).

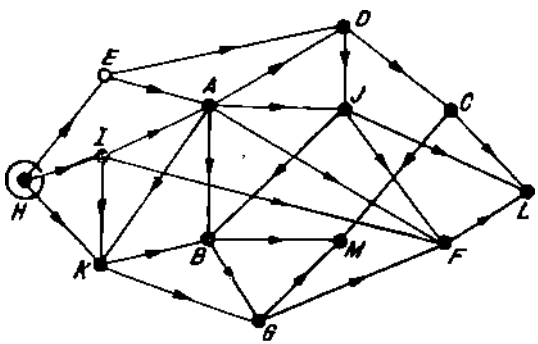


Fig. 1.7

Să căutăm vîrfurile care n-au antecedenţi. Există unul singur şi anume *H,* care va forma nivelul I. Să suprimăm vîrful *H* şi pe graful obţinut, după suprimarea punctului *H* şi a arcelor care ies din *H* (fig. 1.8) să căutăm vîrfurile care nu au antecedenţi; acestea sînt *E* şi *I.* Să suprimăm vîrfurile *E* şi *I* care formează nivelul II şi să suprimăm de asemenea arcele care ies din *E* şi *I.* Vom obţine graful din fig. 1.9. Vom continua în acelaşi mod pînă la epuizarea tuturor arcelor.

Această descompunere în nivele este dată în fig. 1.15. Pe fig. 1.16 s-a reprezentat o altă descompunere obţinută prin eliminarea des- cendenţilor plecînd de la punctele

terminale L şi Jf.

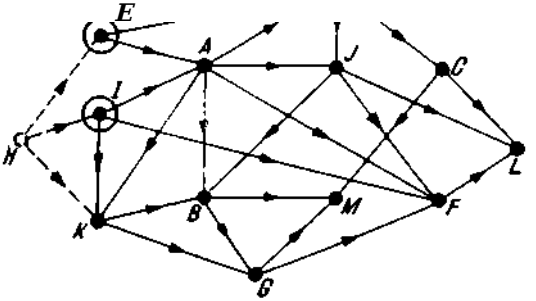


Fig. 1.8

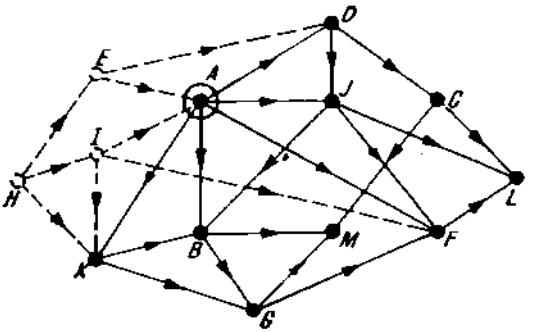


Fig. 1.9

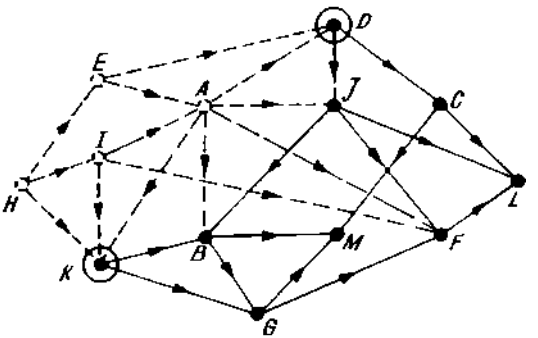


Fig. 1.10

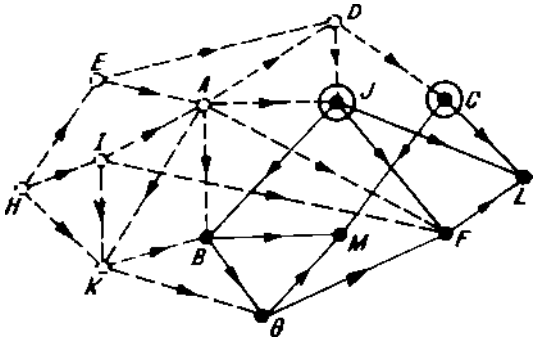


Fig. 1.11

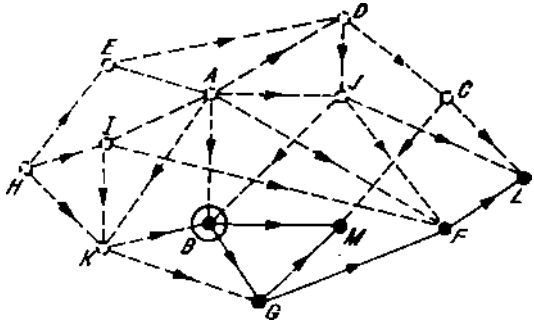


Fig. 1.12

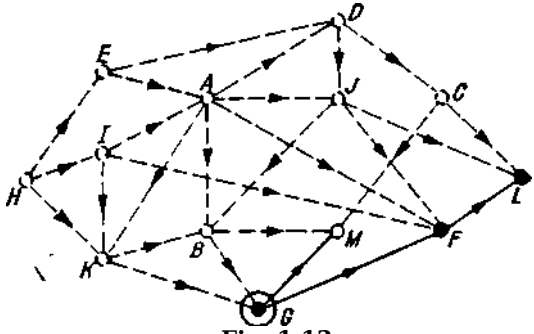


Fig. 1.13

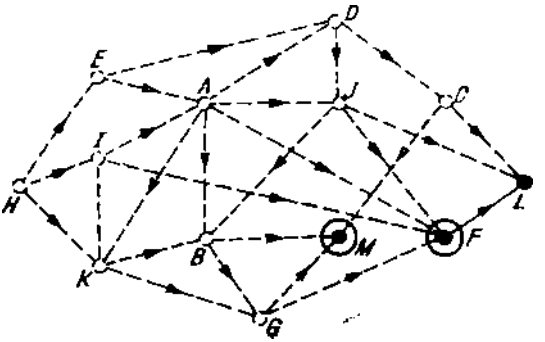


Fig. 1.14

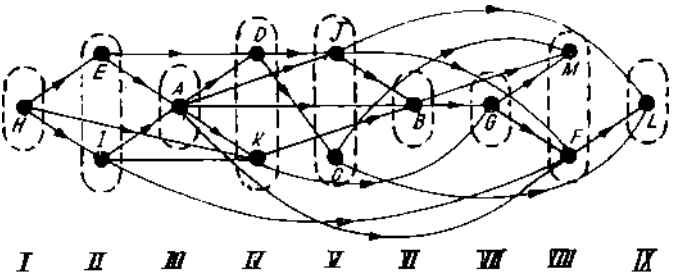


Fig. 1.15 Nivele obținute prin eliminarea antecedenților.

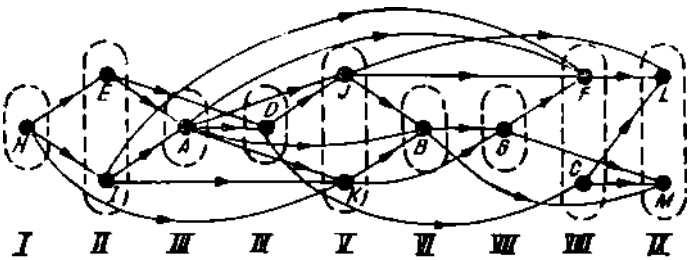


Fig. 1.16 Nivele obţinute prin eliminarea descendenţilor.

1.4.3. CUM_SE ORDONEAZĂ ARCELE

Pentru a ordona arcele, adică pentru a descompune mulţimea arcelor în nivele, pot fi utilizate metodele precedente, după o modificare convenabilă. Vom relua exemplul din fig. 1.5 pe care am reprodus-o în fig. 1.17, după ce am notat arbitrar arcele cu litere latine mici. Pentru a urmări calculele se va utiliza fie matricea dată în tabelul 1.5, fie cele trei figuri 1.18, 1.19 şi 1.20.

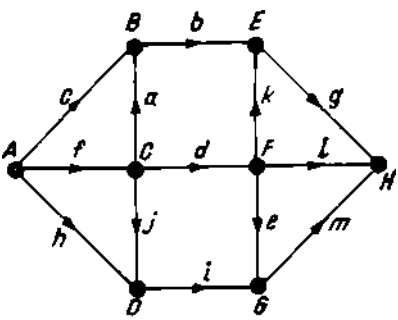


Fig. 1.17

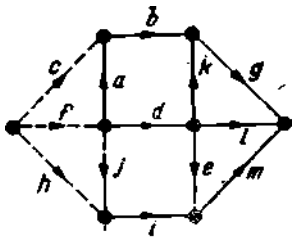


Fig. 1.18

Arcele c, *f* şi *h* nu au antecedenţi; ele vor forma nivelul I în coloana P_o, corespunzînd zerourilor acestei coloane. Coloana V_x va fi obţinută prin relaţia

$$F_x = Vo - Ve - y_t - V»-$$

Se găsesc astfel arcele *b* şi *i* care nu au antecedenţi dacă *c, f* şi *h* sînt scoase ş.a.m.d.

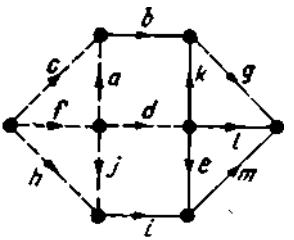


Fig. 1.19

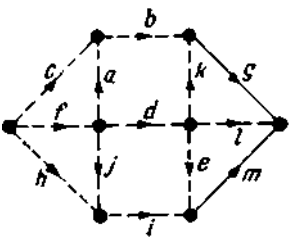


Fig. 1.20

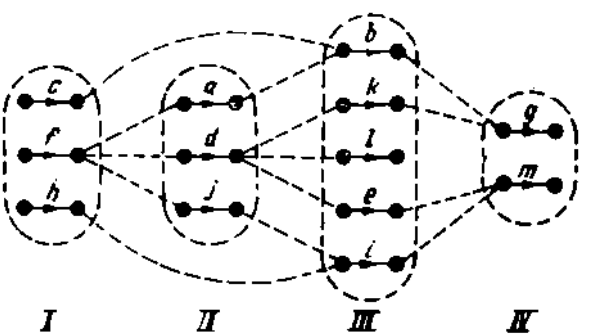


Fig. 1.21

Se va observa că descompunerea în nivele a mulţimii arcelor depinde de vîrful de la care a fost începută.

Pe fig. 1.21 s-a reprezentat rezultatul calculelor pe care le-am făcut cu ajutorul matricei din tabelul 1.5.

Tabelul 1.5

	a	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***9***	***h***	***i***	***j***	***k***	***z***	m	r.	->	—
a						**1**								**1**	**0**	x	x
b	**1**		**1**											**2**	**1**	0	x
c														**0**	x	x	x
d						**1**								**1**	**0**	x	x
e				**1**										**1**	***1***	0	x
f														**0**	***X***	x	x
g		**1**									**1**			**2**	**2**	**2**	**0**
h														**0**	x	x	x
i								**1**		***1***				**2**	**1**	0	x
i						**1**								**1**	**0**	x	x
k				**1**										**1**	**1**	0	x
l				**1**										**1**	**1**	**0**	x
m					**1**				**1**					**2**	**2**	**2**	**0**

1.5. GĂSIREA UNEI ORDONANŢĂRI [##])

1.5.1. ORDONANŢARE DE VÎRFURI

Vom spune că intr-un graf conex fără circuite, am realizat o *ordonanţare a vîrfurilor* dacă am construit un şir al tuturor vîrfurilor grafului care satisfac toate condiţiile de anterioritate definite de arcele grafului. Un astfel de şir nu este deci altceva, decît o permutare a vîrfurilor satisfăcînd toate condiţiile de anterioritate. Pentru a construi o ordonanţare a vîrfurilor este suficient să alegem vîrfurile respectînd ordinea nivelelor definite în 1.4.

Exemple

1. în figurile 1.3 şi 1.4 :

EJIKACDHFBG, IJEAKHCFDGB sînt ordo- nanţări ale vîrfurilor grafului.

2. în figurile 1.7, 1.15 şi 1.16 :

HEIAKDJCBGFML (fig. 1.15)

Şi

HE1ADKJBCFL (fig. 1.16)

sînt ordonanţări ale vîrfurilor grafului din fig. 1.7.

Vom observa că procedeele pe care le-am descris pentru a găsi nivelele nu ne permit, aşa cum sînt date, de a enumera toate permutările care satisfac condiţiile de anterioritate date de graf. Pentru ceea ce ne preocupă în lucrarea aceasta, o astfel de enumerare nu prezintă interes, ea puţind prezenta totuşi un interes evident în alte probleme sau alte metode.

1.5.2. ORDONANŢAREA ARCELOR

Considerînd un graf conex fără circuite, vom spune că

S-au dat acestui cuvînt tot felul de semnificaţii; sensul dat aici va fi mai restrîns, dar mai precis. în afară de 2.6 unde cuvîntul ordonanţare va fi utilizat In sensul mai tehnic, dat de obicei de către planificatori şi organizatori, noi vom rezerva acestui cuvînt semnificaţia matematică dată mai sus.

am realizat o *ordonanţare a arcelor* dacă am construit un şir din toate arcele, satisfăcînd toate condiţiile de anterioritate ale arcelor, unele în raport cu celelalte. Un astfel de şir nu este altceva decît o permutare a arcelor care satisfac toate condiţiile de anterioritate ale arcelor. Pentru a construi o astfel de ordonanţare este suficient de a alege arcele,, respectînd ordinea nivelelor arcelor definite în paragraful precedent.

Exemplu (fig. 1.17 şi fig. 1.21)
chf dj akbleimg şi *hcfadjbkliegm*
sînt ordonanţări ale arcelor grafului din fig. 1.17.

1.5.3.ORDONANŢAREA COMPLETĂ A UNUI GRAF CONEX FĂRĂ CIRCUITE

Se va spune că s-a realizat o ordonanţare completă a unui astfel de graf dacă, după ce s-au desemnat simbolurile pentru reprezentarea vîrfurilor şi simbolurile pentru reprezentarea arcelor, s-a realizat pe de o parte o ordonanţare a vîrfurilor şi pe de altă parte o ordonanţare a arcelor.

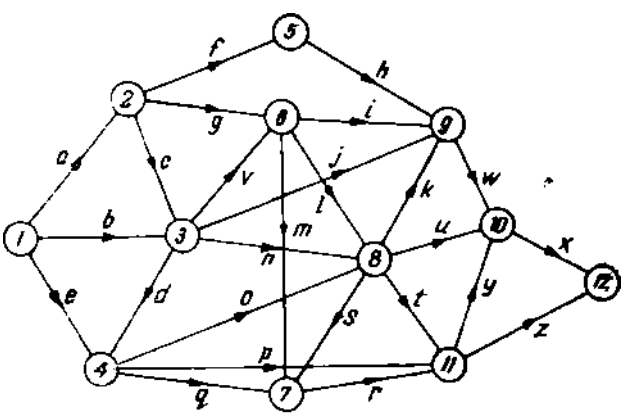


Fig. 1.22

Exemplu

Să considerăm graful fără circuite din fig. 1.22. Am arătat cum se determină nivelele; o ordonanţare a vîrfurilor va fi, de

exemplu:

1, 2, 3, 6, 4, 8, 5, 7, 11, 9, 10, 12.

Tabelul 1.6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Fo				F*					
1		1	1	1									3	3	3	3	3	3	2	1	0	
2			1		1	1							3	3	3	3	2	2	1	0	x	
3				1		1		1	1				4	4	4	3	3	2	0	x	x	
4							1	1			1		3	3	3	2	1	0	x	x	x	
5									1				1	1	1	0		x	x	x	x	x
e							1	1	1				3	3	3	2	1	0		x	x	x
7											1		1	1	1	0		x	x	x	x	x
8							1		1	1	1		4	4	3	1	0		x	x	x	x
9										1			1	1	0	x		x	x	x	x	x
10												1	1	0	x	x	x		x	x	x	x
11										1		1	2	1	0	x	x		x	x	x	x
12													0	x	x	x		x	x	x	x	x
													12	10	9 11	5 6	8	4 6	3	2	1	

Rămîne de găsit o ordonanţare a arcelor. Operînd ca mai înainte, la 1.4, cititorul va găsi uşor cum a fost obţinută fig. 1.24 prin eliminarea progresivă a arcelor fără antecedenţi. O ordonanţare a arcelor va fi, de exemplu :

aebcfghjndvmilopqksutrwzyx.

în anumite cazuri ne va interesa o descompunere a nivelelor în subnivele, unde sînt grupate arcele avînd acelaşi vîrf ca origine (fig. 1.25). Algoritmul dat în 1.4. pentru determinarea unei ordo- nanţări a arcelor va fi uşor modificat în scopul obţinerii de subnivele ale arcelor avînd o

origine comună.

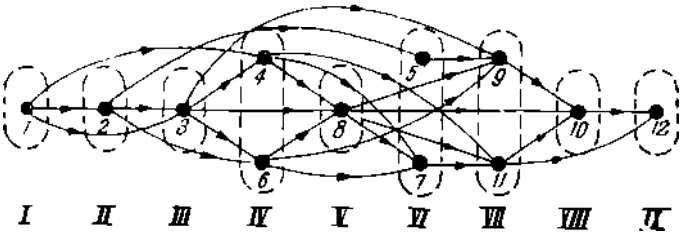


Fig. 1.23

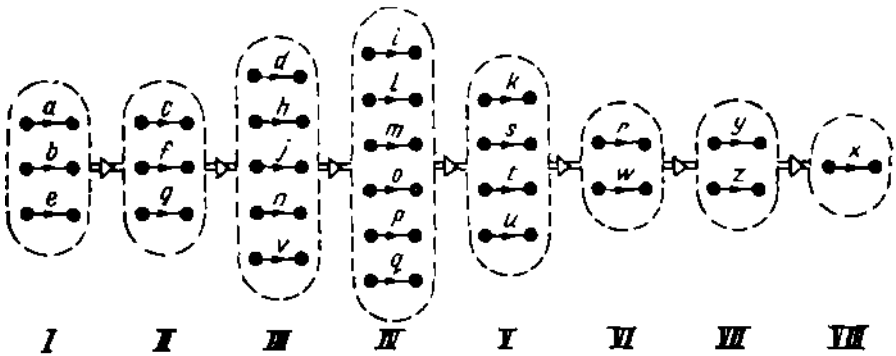


Fig. 1.24

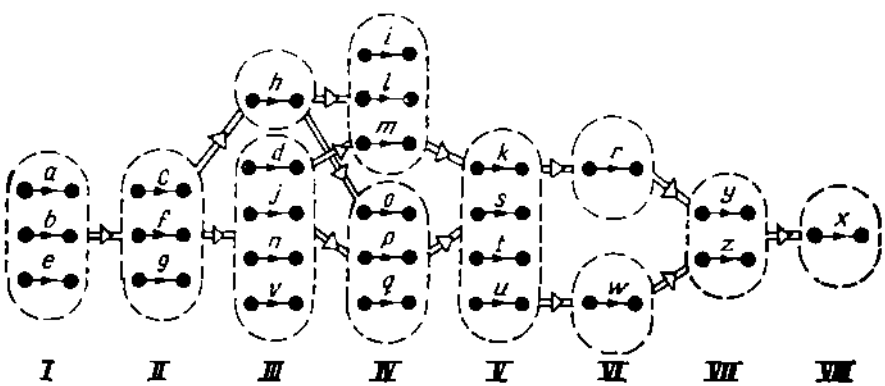


Fig. 1.25

1.5.4.UTILITATEA STUDIULUI UNEI ORDONANŢĂRI COMPLETE

După cum se va vedea mai departe, va trebui să ne preocupăm de programe cuprinzînd operaţii foarte diferite şi adesea date şi specificate „de-a valma” fără a se şti bine care sînt acelea care trebuie să se plaseze înaintea altora, cunoscîndu-se numai anumite antecedente obligatorii. De fapt este vorba, în primul rînd, de a construi graful reprezentînd relaţiile cunoscute din program, adică antecedentele ; acest lucru fiind făcut, se întreprind apoi alte cercetări importante. Scopul acestui prim capitol a fost tocmai de a arăta cum se poate construi graful reprezentativ şi cum se pot numerota convenabil vîrfurile şi arcele. Anumite programe formează grafuri avînd mai multe mii de vîrfuri şi mai multe mii de arce, iar tratarea lor la calculatorul electronic implică mai întîi cunoaşterea unei oidonanţări complete. Este un principiu de organizare după care ne conducem în astfel de consideraţii : tot ceea ce poate fi ordonat trebuie să fie ordonat.

Vom examina acum grafuri în care sînt afectate arcelor valori numerice (intervale de timp, termene etc.).

STABILIREA UNUI PROGRAM DE CERCETARE SAU DE PRODUCŢIE

2.1. INTRODUCERE

Vom arăta în acest capitol cum se stabileşte graful unui program de cercetare, de dezvoltare, sau de producţie. Apoi, prin calculul drumului critic vom deduce timpul de realizare a ansamblului de lucrări, intervalele de variaţie şi marginile operatorii, acestea în cazul cînd operaţiile au durate bine determinate. Vom avea în vedere, mai departe, cazul în care variabilele reprezentînd duratele operaţiilor sînt aleatoare, ceea ce constituie cazul considerat în metoda PERT propriu-zisă.

Vom da diverşi algoritmi permiţînd calcularea drumului sau drumurilor critice şi diverselor abateri cărora li se ataşează o mare importanţă. în sfîrşit, vom vorbi de tratarea acestor programe cu ajutorul calculului electronic.

2.2. REPREZENTAREA UNUI PROGRAM PRINTR-UN GRAF

2.2.1. GENERALITĂŢI

în ceea ce va urma, vom numi *program* o mulţime de *operaţii* care conduc la realizarea unui obiectiv (proiect, mare ansamblu «tc.), astfel încît se cunosc pentru fiecare dintre operaţii durata sa (determinată sau aleatoare) şi

relaţiile de ordine privitoare la aceasta (antecedente obligatorii).

Un program poate fi reprezentat printr-un graf, numit *graf de program* sau *graf de ordonanţare,* ale cărui arce reprezintă operaţiile ; duratele operaţiilor sau *timpii operatori* fiind presupuşi cunos- cuţi, se va ataşa arcelor grafului o valoare nenegativă §§) reprezen- tînd fiecare din aceşti timpi operatori. Vîrfurile grafului, numite *evenimente* şi notate E_f, pot fi interpretate ca indicînd realizarea obiectivelor parţiale (montarea unui subansamblu, de exemplu). Dacă fineţea analizei (operaţii din ce în ce mai simple şi cu durate din ce în ce mai scurte) este foarte mare, evenimentele considerate pierd mult din semnificaţia lor practică, îndeosebi unele dintre ele, care indică marile etape ale proiectului. Durata operaţiei P_o, care este una din operaţiile contribuind la realizarea evenimentului E_j, va fi notată t_{iS}. Figura 2.1 reprezintă un program.

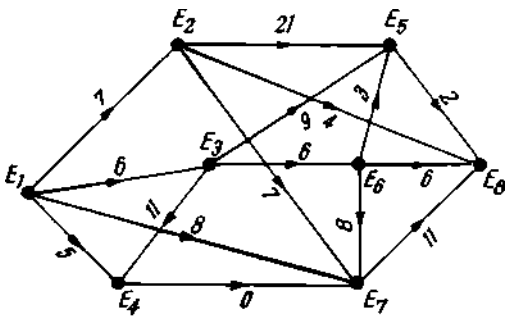


Fig. 2.1.

Stabilirea grafului necesită pentru fiecare operaţie cunoaşterea operaţiilor care o preced imediat. Graful traduce astfel relaţiile de ordine existente în mulţimea operaţiilor; el constituie o reprezentare a ceea ce unii

§§ **Cum se va vedea mai departe, va fi totuşi posibil să luăm în consideraţie valori negative.**

numesc *ordonanţare* [***]). Se va observa că unei aceleiaşi ordonanţări a operaţiilor, deci aceluiaşi graf, îi pot corespunde mai multe programe diferite, dacă timpii operatori sînt diferiţi.

Se va observa că graful unui program este *fără circuite,* altfel o operaţie ar putea fi făcută să urmeze ei însăşi.

Primul lucru de îndeplinit în vederea aplicării metodei drumului critic va fi, astfel, întocmirea unei liste de operaţii care va fi subdi- vizată, mai mult sau mai puţin, în raport cu precizia dorită.

Ne vom strădui să alegem operaţii cit mai simple, pentru care timpii operatori să fie de valori comparabile. Apoi se vor determina antecedentele fiecăreia dintre operaţii. Această parte numită *analiză de lucru* este cea mai importantă şi adesea cea mai lungă. Ea necesită colaborarea strînsă a întregului personal (ingineri, contramaiştri, muncitori) interesat în realizarea pe care vrem să o întreprindem şi care se dovedeşte foarte utilă ca atare.

Pentru a concretiza, vom examina un exemplu, acela al construcţiei unei vile. Pentru a construi o vilă este necesar un anumit număr de operaţii pe care le enumerăm într-o anumită ordine :

a) elaborarea planurilor;
b) obţinerea autorizaţiei de construire ;
c) semnarea contractului;
d) transportarea materialului la şantier (agregate, piatră de construcţie, cărămizi...);
e) executarea racordurilor electrice şi de apă pentru şantier;
f) executarea fundaţiilor;
g) executarea lucrărilor de zidărie portantă;
h) executarea şarpantelor;
i) executarea acoperişului;
j) executarea pardoselilor;
k) executarea pereţilor despărţitori din cărămizi uşoare;

***♦*) **Alţi autori numesc *ordonanţare* programul însuşi.**

l) executarea instalaţiilor de încălzire centrală, gaze ;
m) executarea instalaţiilor electrice interioare ;
n) montarea tocurilor;
o) tencuirea pereţilor;
p) executarea a două şemineuri în piatră;
q) montarea obiectelor sanitare şi a bucătăriei;
r) executarea lucrărilor în ipsos ;
s) montarea prizelor şi a întreruptoarelor electrice ;
t) montarea uşilor şi a ferestrelor;
u) executarea zugrăvelilor şi a tapetelor;
v) montarea centralei termice şi a radiatoarelor;
w) transportarea pământului pentru grădină;
x) montarea contoarelor şi executarea branşamentelor pentru energie electrică, gaze, telefon, apă;

y) curăţirea şantierului;
z) recepţia provizorie.

Să numim E_1 evenimentul iniţial sau începutul lucrărilor şi să numim E_2 evenimentul cînd contractul poate fi semnat. între $E_\pm$ şi E_2 se găsesc două operaţii: elaborarea planurilor şi obţinerea autorizaţiei de construire. Dacă regulamentul administrativ prevede că nu se poate acorda o autorizaţie de construire fără a avea planurile, cum se întîmplă în general, vom aşeza între E_t şi E_2 un eveniment E_3: planurile sînt terminate. După evenimentul E_2, se vor putea întreprinde simultan operaţiile *e* şi *c,* cu timpii operatori t_{24} şi Z_{25}; într-adevăr, racordurile electrice şi de apă nu sînt în general făcute de antreprenor. Evenimentul E_5 constă în semnarea contractului; se poate atunci întreprinde operaţia *d,* de timp operator Z_{54}. Operaţia/, de timp operator $<_{46}$, se va plasa după evenimentul E_4 pentru că într-adevăr ea nu poate începe decît după îndeplinirea operaţiilor *d* şi *e.* Lăsăm cititorului sarcina să continue construcţia grafului apărut în fig. 2.2., făcînd anumite ipoteze care i se vor părea apropiate de realitate sau consultînd eventual un prieten arhitect. Cititorul să nu caute o interpretare a evenimentului E_2 aşezat în fig. 2.2 pentru a uşura urmărirea expunerii. într-o problemă ca cea a construirii unei vile, duratele operaţiilor sînt în general aleatoare; după cum am mai spus, va trebui să precizăm cum vor fi determinate şi cum vor fi utilizate astfel de variabile aleatoare.

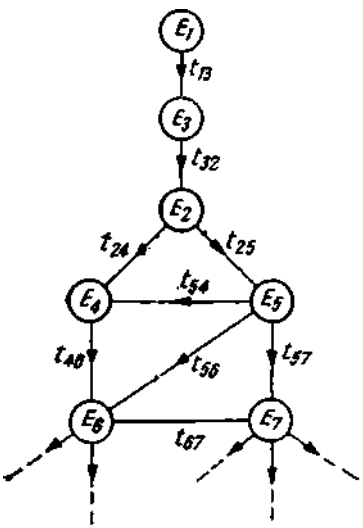


Fig. 2.2.

Reprezentarea unui program cu ajutorul unui graf poate fi făcută altfel. Nu vom mai reprezenta printr-un vîrf un eveniment, ci o operaţie determinată, şi vom folosi un arc pentru a reprezenta ordinea în care două operaţii Q_{ij} şi Q_{jk}

trebuie să urmeze una alteia, astfel încît să fie posibil de dat un răgaz între începerea lui Q_{iS} şi aceea a lui Q_{lk}. în această reprezentare este convenabil a numi *sarcini* operaţiile considerate înainte şi *restricţii* arcele cărora le sînt

afectate valorile de răgaz sau de întîrziere. Figura 2.3 dă graful corespunzător celui din fig. 2.2. după ce a fost astfel retranspus.

Pentru a face să apară mai simplu trecerea de la o reprezentare la alta, prezentăm un alt exemplu în figurile 2.4—2.6. Cum se vede în figurile 2.5 şi 2.6, este convenabil să adăugăm două sarcini
D şi *F* reprezentînd începutul şi sfir- şitul programului. Din figura 2.6 se vede că sarcina *g* se plasează după sarcinile *b* şi *d*; între *g* şi *b* există o restricţie : *g* nu poate începe dacă nu s-a scurs un timp egal cu 6 de la începerea lui *b* ; între *g* şi *d* există o restricţie : *g* nu poate începe dacă nu s-a scurs un timp egal cu 4 de la începerea lui *d.* De altfel, sarcinile *d, f* şi *e* nu pot începe decît cu 3 unităţi de timp după începerea lui *a.*

Cele două reprezentări au respectiv avantaje şi inconveniente. Va fi convenabilă alegerea uneia sau alteia în funcţie de natura problemei al cărei program se construieşte. Se va observa, totuşi, că reprezentarea prin sarcini şi restricţii permite introducerea de noi restricţii la un program, sau modificarea relaţiilor de ordine dintre sarcini, prin simpla adăugare de arce, fără a se modifica complet graful.

Americanii au folosit în sistemul PERT reprezentarea cu evenimente şi operaţii. în Franţa, mai ales după publicarea lucrărilor lui B. Roy *), se foloseşte de preferinţă reprezentarea cu sarcini şi restricţii, iar metoda corespunzătoare *toda potenţialelor.*

) Multe figuri din acest paragraf au fost luate din articolul lui B. Roy [12],

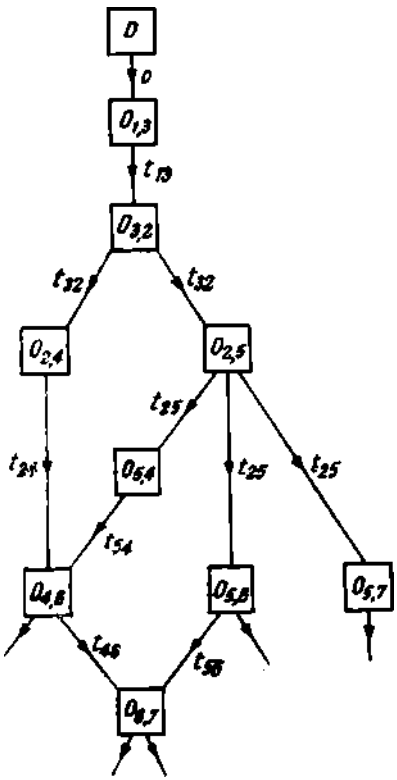


Fig.

a fost numită de B. Roy

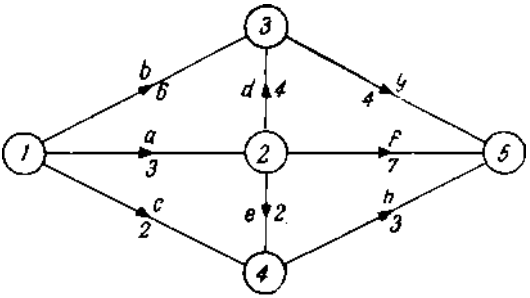


Fig. 2.4.

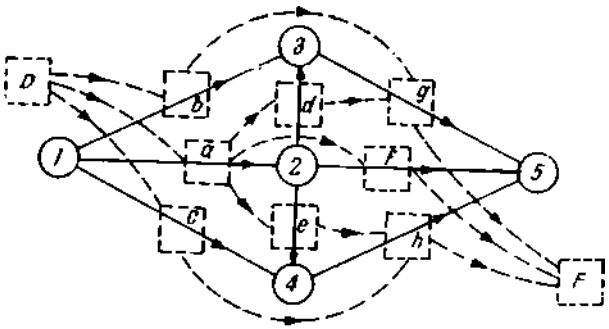


Fig. 2.5.

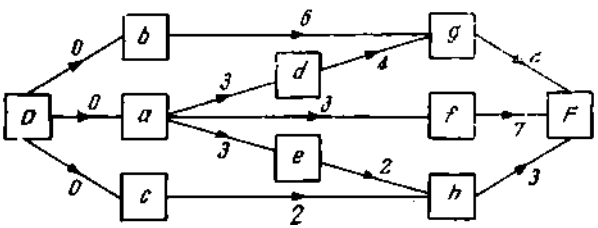


Fig. 2.6.

Vom da acum cîteva exemple de situaţii care pot fi întîlnite în stabilirea unui program.

2.2.2.OPERAŢII COMPUSE

Să considerăm o operaţie *a* compusă din trei operaţii elementare a_2 şi a_3 (fig. 2.7) astfel încît operaţia c urmează lui a_n *d* urmează lui a_2 şi *b* urmează lui a_3.

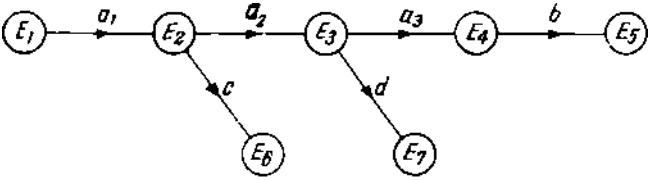


Fig. 2.7

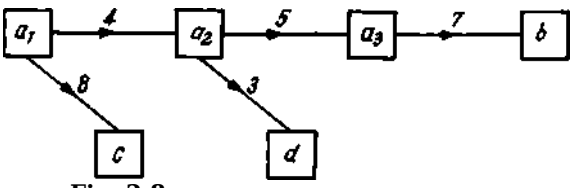


Fig. 2.8

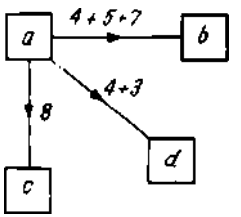


Fig. 2.9

Figura 2.8 dă reprezentarea prin sarcini şi restricţii. Se vede că este posibil atunci să se simplifice reprezentarea (fig. 2.9); noile restricţii sînt uşor de calculat.

2,2.3. OPERAŢII PARALELE

Să presupunem că între două evenimente E_t şi Ej se plasează două operaţii diferite b şi c care urmează unei operaţii a. Se introduce atunci un eveniment fictiv E', şi o operaţie *virtuală* x între E' şi Ej. în cazul în care există trei, patru,... operaţii în paralel, vom proceda la fel, introducînd pentru fiecare dintre ele un eveniment, fictiv şi o operaţie virtuală.

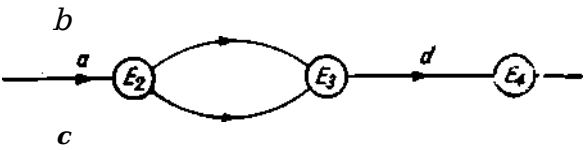


Fig. 2.10

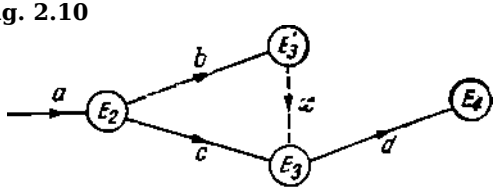


Fig. 2.11

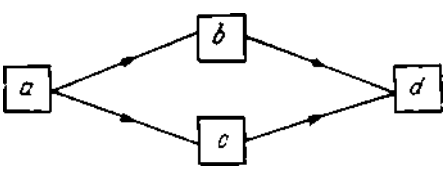


Fig. 2.12

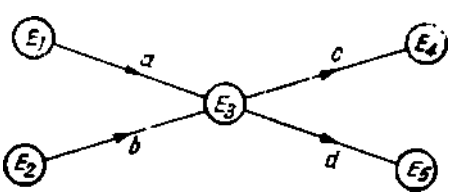


Fig. 2.13

în reprezentarea prin sarcini şi restricţii (fig. 2.12) nu

este util să se introducă astfel de evenimente şi operaţii artificiale.

2.2.4. OPERAŢII DEPENDENTE ŞI INDEPENDENTE

Să considerăm fig. 2.13 : operaţia *c* urmează lui *a* şi *b,* la fel operaţia *d* urmează lui *a* şi *b.* Acum, să presupunem că *c* urmează lui *a* şi *b,* dar *d* îi urmează lui *b,* fără să-i urmeze lui *a;* nu se mai poate folosi acelaşi graf, trebuie introdus un eveniment E'_3 şi o operaţie *x* artificiale (fig. 2.14).

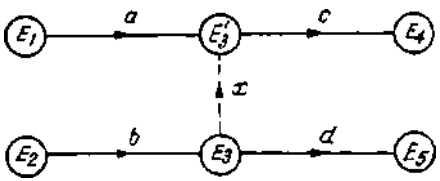


Fig. 2.14

în reprezentarea prin sarcini şi restricţii, nu este necesară introducerea evenimentelor şi a operaţiilor artificiale. Figura 2.15 cores-

punde cazului figurii 2.13 şi figura 2.16 corespunde cazului figurii 2.14.

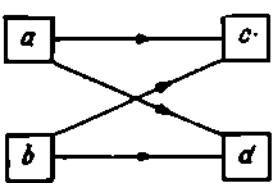


Fig. 2.15

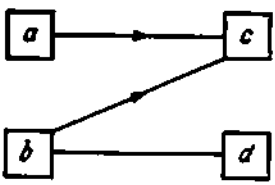


Fig. 2.16

2.2.5. RESTRICŢII PARTICULARE. CONDIŢII LIMITĂ DE PORNIRE

Să presupunem că o anumită operaţie nu poate începe decît pornind de la o anumită dată, adică pornind cu o anumită întârziere după evenimentul E_1 considerat primul. O astfel de restricţie se va exprima introducînd o operaţie artificială *z* între Fj şi evenimentul E_t unde începe operaţia considerată (fig. 2.17). în cealaltă reprezentare se va introduce o restricţie între *D* şi *b* (fig. 2.18).

Figurile 2.19 şi 2.20 se referă la cazul în care se ajunge la introducerea a două operaţii artificiale *x* şi *z;* operaţia c trebuie să urmeze operaţiei *a* şi să pornească la data *z.*

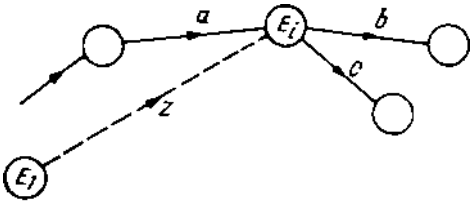


Fig. 2.17

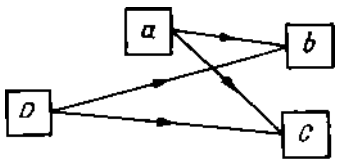


Fig. 2.18

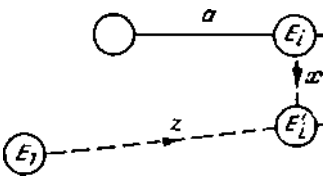


Fig.

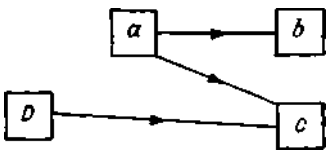


Fig.

în numeroase probleme se întîlnesc astfel de *condiţii de pornire,* de exemplu : termene de livrare de material, condiţii climaterice etc. După cum se vde, astfel de condiţii particulare pot fi uşor introduse în program.

Să semnalăm, de asemenea, un alt tip de restricţii întîlnite uneori :

Pentru ca o sarcină j să pcată începe, este necesar ca timpul scurs de la începerea unei alte sarcini i să fie cel mult egal cu un timp dat t^.

Astfel de restricţii permit evitarea anumitor aşteptări neacceptabile, asigurarea continuităţii între două sarcini sau traducerea simultaneităţii. Pentru a putea ţine cont de ele şi a le introduce în graf, le vom enunţa altfel: *Pentru ca o sarcină i să poată începe, este necesar ca cel puţin timpul scurs de la începerea unei alte sarcini j să fie egal cu un timp dat* (— $/_y$), ceea ce conduce la restricţii obişnuite, dar cu o durată negativă (lungimea arcului asociat va fi deci negativă), ceea ce nu complică în mod necesar rezolvarea problemei.

Ne vom ocupa de data realizării lucrărilor şi aceasta ne va conduce la obiectul lucrării : metoda drumului critic. Algoritmii şi procedeele care vor fi luate în considerare vor conveni tot atît de bine unei reprezentări evenimente-operaţii, cît şi unei reprezentări sarcini-restricţii.

2.3. DATA REALIZĂRII ANSAMBLULUI DE LUCRĂRI. DRUMUL CRITIC

Avînd stabilit graful unui program, organizatorul îşi va pune întrebarea următoare: care este *data realizării* ansamblului de lucrări, adică durata programului de realizat. Această durată nu poate fi inferioară sumei *timpilor operatori* luaţi pe *drumul cel mai nefavorabil de la* E_x *la* E_n, adică cel care dă între aceste două puncte o sumă maximă de timpi operatori. Acest drum (putem avea mai multe) este numit *drum critic.*

Aceasta se poate înţelege cu ajutorul grafului foarte elementar din fig. 2.21. Evenimentul E_3 reprezintă realizarea celor trei operaţii P_{12}, *i|.3* Şi *?2.3-* Se vede că vor trebui 8 unităţi de timp pentru ca acestea să aibă timp să se realizeze.

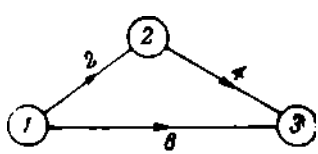


Fig. 2.21

Luînd pentru durata ansamblului de lucrări suma timpilor operatori luaţi pe drumul *cel mai nefavorabil de la* E_t *la* E_n, ne-am asigurat că toate operaţiile prevăzute pot fi efectiv realizate, ţinînd seama de duratele lor respective. Calculul datei de realizare a lui E_n revine atunci la căutarea în graf a drumului cel mai lung[†††]) sau a *drumului critic.*

Formularea matematică şi diferiţii algoritmi care permit rezolvarea acestei probleme vor fi daţi în 2.5. Toţi aceşti

---

††† **Este totuşi preferabil să vorbim de *drumul de valoare maximală,* mai curînd decît de drumul *cel mai lung.* într-adevăr, In teoria grafurilor, lungimea unui drum este numărul de arce care constituie acel drum şi lungimea unui arc este, prin definiţie, egală cu 1.**

algoritmi se bazează pe *teorema de optimalitate* a programării dinamice. Pentru moment vom prezenta o variantă a unuia dintre aceşti algoritmi, aplicîndu-l la un exemplu cu caracter didactic.

Începînd cu E_{If} căruia îi atribuim termenul 0, se consideră în fiecare vîrf arcele care ajung acolo; pentru fiecare din aceste arce se face suma timpului operator implicat de arc şi a termenului evenimentului origine al arcului. Se compară rezultatele şi se alege valoarea cea mai mare, pentru a o afecta vîrfului considerat.

Să considerăm fig. 2.22. în E_2 ajunge un singur arc (1, 2); pentru că în E_x avem 0, în E_2 punem 0 + 8 = 8. în E_3 ajung două arce (2, 3) şi (1, 3), se compară atunci 8 + 4 = 12 şi 0 + 13 = 13 şi punem 13 în E_3; aceasta înseamnă că E_3 nu poate fi atins înainte de timpul 13. în E_4 ajung două arce (3, 4) şi (1, 4), se compară atunci 13 + 7 = 20 şi 0 + 9 = 9, punem deci 20 în E_t. în E_s punem 17. în E_6 ajung două arce (2. 6) şi (3, 6), se compară 8 + 6 = 14 şi 13 + 10 = 23 şi punem 23 în E_6. în E_a ajung trei arce (6, 8), (3, 8) şi (4, 8), se compară 23 + 3 = 26, 13 + 6 = 19 şi 20 + 9 = 29, deci punem 29 în E_a. Şi astfel continuăm pînă în E_{12} unde se găseşte în final 61. Acest număr reprezintă timpul de realizare pornind de la data 0. Drumul corespunzător lui 61 se obţine uşor din aproape în aproape, mergînd de la E_{12} la E_1; el constituie drumul critic. Acesta este însemnat cu linii îngroşate în fig. 2.22.

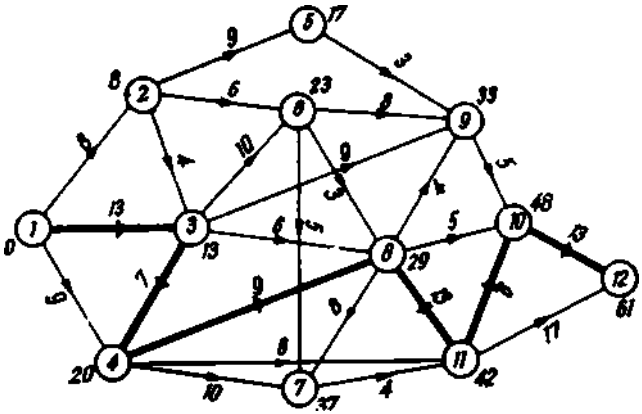


Fig. 2.22

Dacă programul se desfăşoară fără incidente, durata sa va. fi 61 săptămîni şi evenimentele diferite se vor produce la datele însemnate pe fig. 2.22.

Operaţiile

-^1.3? -P3.4, ^4.8, -^8.11, -^11,10 ŞÎ -^10.12

se numesc *operaţii critice.* Ele trebuie să înceapă la datele evenimentelor origine ale arcelor. Astfel operaţia $P_{4\,8}$ trebuie să fie întreprinsă la dat a evenimentului E_2, adică la data 20. Dacă pornirea unei operaţii critice este întîrziată, atunci tot programul se va întîrzia. De exemplu, dacă operaţia $P_{4\,8}$ nu este întreprinsă decît la data 22, vila nu va fi terminată decît la data 63.

Operaţiile critice sînt, deci, operaţiile programului asupra cărora planificatorul trebuie să-şi îndrepte toată atenţia în cursul realizării, căci de buna lor desfăşurare depinde data de realizare a ansamblului lucrărilor.

în 2.4 vom vedea că *operaţiile necritice* admit unele întîrzieri în începerea lucrărilor.

2.4. INTERVALE DE FLUCTUAŢIE. MARGINI

2.4.1. DATA REALIZĂRII UNUI EVENIMENT

Am stabilit, în paragraful precedent, datele diferitelor evenimente care compun programul.

Este interesant de cunoscut, pentru fiecare eveniment necritic data sa limită de realizare, dată de la depăşirea căreia tot programul va fi întîrziat. Pentru aceasta să considerăm evenimentul Timpul minim necesar pentru realizarea operaţiilor situate între *Ei* şi E_n se obţine căutînd pe graf drumul cel mai lung de la E_ℓ la E_n. Printr-un astfel de procedeu, sîntem asiguraţi că operaţiile care urmează lui E_t pot fi efectiv realizate, ţinînd seama de duratele lor respective.

Data limită căutată *ti* se va obţine scăzînd acest timp din data t_n a evenimentului final E_n.

Am obţinut astfel, pentru fiecare eveniment necritic, două date :

— data este *data aşteptată a realizării* evenimentului *Ei;*

— data $t^{\ddagger\ddagger\ddagger}$ *) este *data limită de realizare* a evenimentului E_t, după depăşirea căreia timpul total de execuţie a ansamblului lucrărilor este modificat.

Pentru evenimentele critice, data limită *ti* se confundă cu data aşteptată t,. Aceste evenimente nu tolerează nici o întîrziere în privinţa realizării lor sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, operaţiile critice nu tolerează nici o întîrziere în ceea ce priveşte începerea lucrărilor.

Intervalul [<*, î'] se numeşte *interval de fluctuaţie,* este deci intervalul în care se va putea plasa evenimentul necritic E_{if} fără a modifica timpul total de execuţie a ansamblului lucrărilor.

---

‡‡‡ **Data aşteptată *fţ* este uneori numită *data cea mai apropiată* şi data limită *tţ — data cea mai ttrzie.***

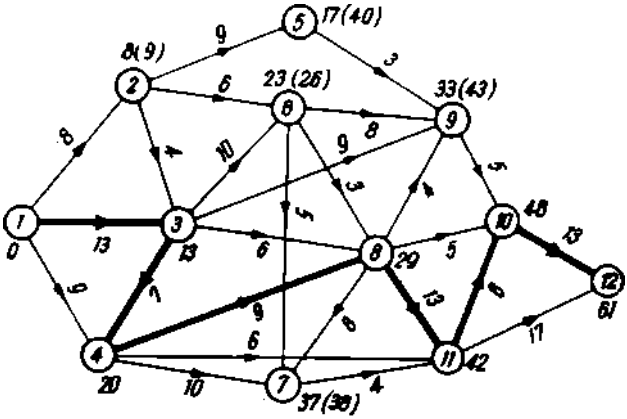


Fig. 2.23

Să reluăm exemplul construirii unei vile şi să calculăm datele limită *ti* folosind aceeaşi metodă care ne-a servit la calcularea lui t_{if} dar de data aceasta pornind de la evenimentul final E_{12}. Să considerăm mai întîi (fig. 2.23) evenimentul E_7 care este separat de E_n de un timp operator 4, deci operaţia P_{711} poate începe cu 4 săptămîni înaintea lui E_n şi evenimentul E_7 trebuie să fie plasat în intervalul [37, 38]. E_9 este separat de P_{10} de un timp operator 5, deci operaţia -f*9,io poate începe cu 5 săptămîni înaintea lui E_{10} şi evenimentul E_9 trebuie să fie plasat în intervalul [33, 43], E_6 este separat de E_9 de un timp operator 8, de E_9 de un timp operator 3 şi de E_7 de un timp operator 5 ; trebuie să comparăm 43 — 8 = 35, 29—3 = 26 şi 38—5 = = 33 şi astfel evenimentul E_s nu poate depăşi data 26 (cea mai mică din cele trei) fără a provoca o perturbare care să influenţeze data terminării lucrării. Numerele care trebuie să fie calculate au fost aşezate pe fig. 2.23 şi încadrate în paranteze pentru a nu fi confundate cu cele aşezate în timpul căutării drumului critic. în E_5 seva aşeza (40); în E_2 se va compara 40 — 9 = 31, 26 — 6 = 20, 13 — — 4 = 9 şi se va aşeza (9).

în final, datele evenimentelor E_f se vor putea plasa în intervalele date mai jos, aceste intervale putînd să se reducă la o dată obligatorie pe drumul critic :

$p_{1:}$	0	P_7:	[37, 38]
^2	[8,9]		29
$E,$	13	E_9	[33, 43]
E_t	20	^IO	48
E_5	[17, 40]	$E_{„}$	42
E_6	[23, 26]	E_{12}	61

Este la fel de interesant să cunoaştem, pentru fiecare operaţie P_{ij}, întîrzierea care poate fi admisă la începerea sa, fără a perturba data de realizare a evenimentului *Ej.* Această întârziere putînd fi admisă la începerea lui P_{ij} este *marginea liberă* a lui P_{i3}.

Dacă t; şi t,- sînt datele aşteptate ale evenimentelor E_t şi E_{jf} incadrînd operaţia P_{ih} de durată marginea sa liberă este

$$- t_t - t» , \tag{2.1}$$

Marginile libere ale operaţiilor critice sînt nule, căci pornirea lor trebuie să înceapă fără nici o întîrziere.

Se defineşte de asemenea pentru fiecare operaţie *P^ o margine totală* şi o *margine sigură.*

Marginea totală a operaţiei P_{ij} este, prin definiţie :

$$- t_t - t_{tj}. \tag{2.2}$$

Marginea sigură a operaţiei P_{ij} este, prin definiţie :

$$_ _t; - t_{tj}. \tag{2.3}$$

Intervalele de fluctuaţie şi marginile libere măsoară elasticitatea unui program. Cu cît acestea sînt mai reduse, cu atît programul este mai rigid. Un program *total rigid* este un program în care toate drumurile sînt critice : nu există atunci nici intervale de fluctuaţie, nici margini libere. Nici, o întîrziere nu poate fi tolerată de nici una dintre operaţii.

Diferenţa esenţială între intervalul de fluctuaţie pentru un eveniment E_{ℓ} şi marginea liberă sau totală pentru o operaţie P_{tj} este că *intervalul de fluctuaţie* pentru E_t

reprezintă întîrzierea care poate fi tolerată, în ceea ce priveşte realizarea lui E_{if} fără a perturba datele fixate ale evenimentelor critice şi, în particular, a evenimentului final, corespunzător realizării proiectului, în timp *ce marginea liberă* pentru operaţia P_{i3} reprezintă întîrzierea care poate fi adăugată începerii acestei operaţii fără a perturba data de realizare aşteptată a evenimentului E_s, iar *marginea totală* reprezintă întîrzierea maximă de începere a acestei operaţii.

Un alt aspect al noţiunii de margine liberă poate fi examinat în cazul în care timpii operatori ai operaţiilor, necritice sînt susceptibili de a fi lungiţi. Marginea liberă corespunde atunci lungirii posibile a duratei operaţiei necritice P_{lj} lăsînd neschimbate datele t_t şi f ale evenimentelor E_{ℓ} şi £7,, care încadrează această operaţie. Această diferenţă între intervalul de fluctuaţie şi marginea liberă sau totală apare mai bine în graful din fig. 2.23 reprodus în fig. 2.24. Astfel intervalul de fluctuaţie al lui E_6 este [23, 26], Marginea liberă a operaţiei $P_{6\,9}$ este

$$33 — 23 - 8 = 2.$$

Operaţia $P_{6\,S}$ poate deci să înceapă la data 23 + 2 = 25 fără a perturba data lui E_9 care rămîne atunci 33. Marginile libere ale operaţiilor sînt însemnate în paranteze pe graful din fig. 2.24.

Marginea totală a operaţiei $P_{6ţ9}$ este 43—23 — 8 = 12 ; operaţia P_6,9 poate atunci să înceapă la data 23 + 12 = 35 fără a antrena vreo întîrziere în realizarea ansamblului lucrărilor.

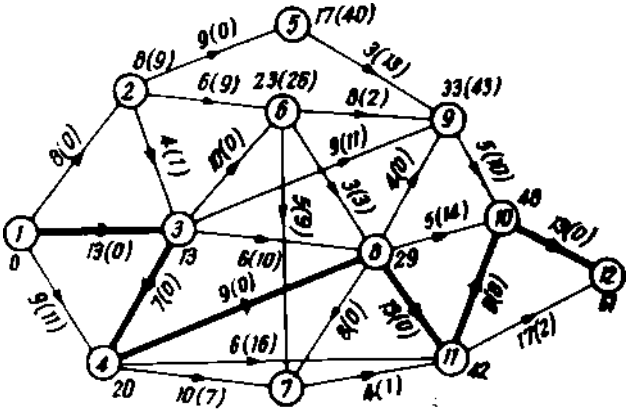


Fig. 2.24

De fapt, marele interes al noţiunilor de intervale ale fluctuaţiei şi de margini libere apare mai ales în cursul realizării programului. Dacă toate evenimentele se realizează înaintea datei lor limită *t',* programul se va desfăşura normal şi data realizării finale t_n va fi respectată. Din contră, dacă se întîmplă, dintr-un motiv oarecare, ca data de realizare a unui eveniment să depăşească data limită *ti,* atunci organizatorul trebuie să ia măsuri, dacă are posibilitatea, pentru a face să accelereze sarcinile din această parte a programului. Dacă nu are această posibilitate, el poate afirma atunci că data de realizare a ansamblului lucrărilor $t_{„}$ va fi întîrziată şi va putea evalua întîrzierea.

Datele limită sînt deci *limite de securitate* şi joacă rolul de sonerii de alarmă pentru organizator în timpul punerii în execuţie a programului.

în anumite studii s-a utilizat ca un criteriu de prioritate marginea liberă, dar în general, cînd este vorba de a pune în lucru şi de a se controla mijloacele destinate realizării ordonanţării, criteriul de prioritate ales este marginea totală; este criteriul luat în consideraţie cel mai des.

2.4.2. OBSERVAŢII ASUPRA METODEI POTENŢIALELOR

Aplicarea procedeelor de calcul care vor fi prezentate la un graf al reprezentării prin sarcini şi restricţii necesită comentariile următoare.

Data t_i calculată acum este, data de pornire a sarcinii (operaţiei) *Pi.* Această dată este numită în metoda potenţialelor *data cea mai apropiată.*

La fel, data t' este data limită de pornire â sarcinii P_i, după depăşirea căreia timpul total de execuţie al ansamblului lucrărilor este lungit; ea se numeşte *data cea mai tîrzie.*

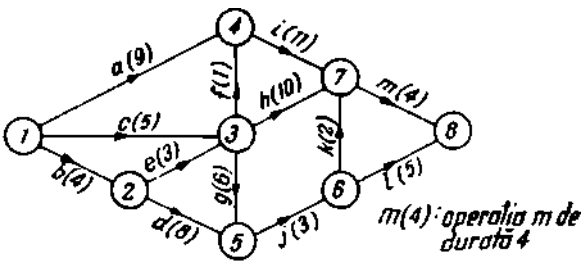


Fig. 2.25

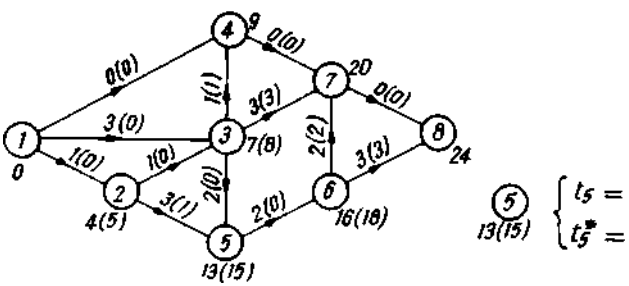


Fig. 2.26

Definiţiile date mai înainte privitoare la diferitele margini sînt mereu valabile şi se va observa că marginea totală a sarcinii este furnizată direct de diferenţa $f_i - t_i$.

Exemplul următor va permite cititorului să sesizeze mai bine legăturile existente între cele două reprezentări. Figura 2.25 reprezintă graful unui program. Pe fig. 2.26 s-au însemnat pe arcele gra-

fului marginea totală şi între paranteze marginea liberă a operaţiilor, în sfîrşit, figura 2.27 este reprezentarea prin sarcini şi restricţii ale
aceluiaşi program.

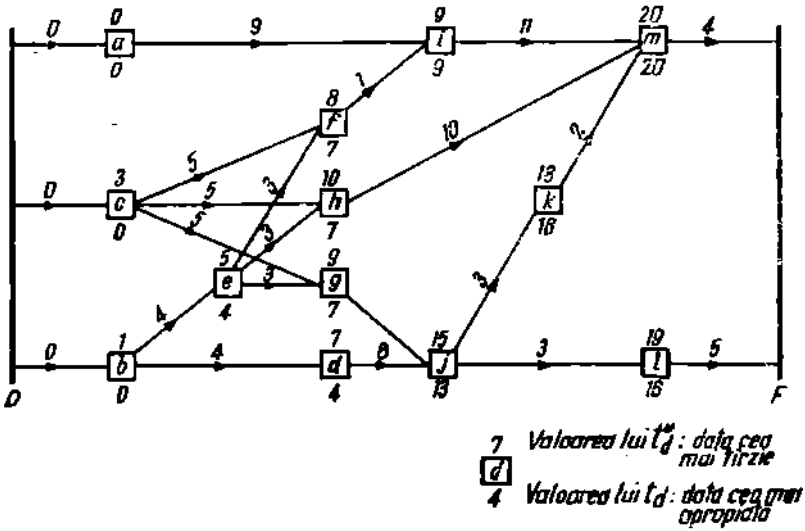


Fig. 2.27

Se constată că pentru operaţia *d,* de exemplu, data sa limită de pornire se obţine pe fig. 2.26, făcînd suma datei aşteptate a evenimentului E_2 şi a marginii totale, fie 4 + 3 = 7 ; această dată este tocmai data cea mai tîrzie notată pe fig. 2.27.

2.5. CĂUTAREA DRUMULUI CRITIC. ALGORITMII UTILIZAŢI

2.5.1. ASPECT MATEMATIC

Acest paragraf poate fi neglijat la o primă lectură, el prezentînd în mod simplu aspectul matematic al ideilor dezvoltate în paragrafele precedente *).

♦) Cititorul care nu este obişnuit cu mînuirea formulelor matematice va merge direct la algoritmul practic dat la sfirşitul acestui paragraf.

Formularea matematică a metodei expuse în 2.3 este următoarea :

Fie U mulţimea arcelor constituind graful programului, t_{it} durata operaţiei t_t şi t' datele de realizare *aşteptată* şi *limită* ale evenimentului Atunci avem :

$$<! = 0 \qquad (2.4)$$

$$tj = \text{MAX} — (t* + tj,\ j = 2, 3,..n, \qquad (2.5)$$
(». i) £l>7

unde *(i, j)* reprezintă arcul mergînd din vîrful *i* la vîrful *j* şi Uf este submulţimea arcelor care se întîlnesc în *j* şi sînt orientate către *j.*

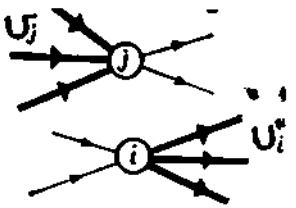


Fig. 2.28

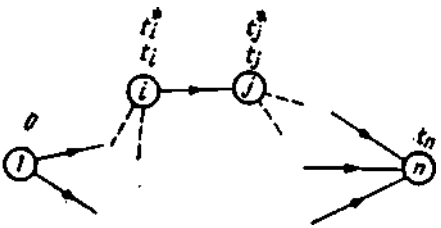


Fig.

MAX înseamnă că se ia maximul pentru toate arcele (i, j) aparţinînd lui Uj' .

De asemenea: :

$$t_i = \text{MIN}\ (t) - tj,\ i = 2,. . ., n - 1, \qquad (2.6)$$

$$t_{„} = t_{„} — \text{data de realizare a proiectului total,} \qquad (2.7)$$

$$t'i = <i = 0 — \text{data de pornire a proiectului.} \qquad (2.8)$$

Intervalele de fluctuaţie şi marginile se deduc atunci din (2.5) şi (2.6) prin relaţiile următoare :

interval de fluctuaţie : *(2.9)*

marginea totală a lui P_{tj}: *h li Iii) tj ti* — *iii-* (2.10)

marginea liberă a lui P_{tj}: *tij, l]* — (2-11)

a lui :

O altă metodă de calcul este următoarea :

$$«i = 0, \qquad (2.13)$$

$$h = \underset{\mathbf{n \in n,\ (»» 6\ u}}{\text{MAX}} [S *„], j=2.....,\quad n, \qquad (2.14)$$

fi; fiind mulţimea drumurilor plecînd de la 1 către *j,*

$$X = t_{n}, \qquad (2.15)$$

$$z; = t_n - \underset{\mathbf{v\ g \qquad («, >)\ g\ V}}{\text{MAX}} [S\ tj, j = 2, ..., n - 1 \qquad (2.16)$$

fiind mulţimea drumurilor mergînd de la *j* către *n,*

$$- o, \qquad (2.17)$$

formulele (2.9) — (2.12) determină deci intervalele de fluctuaţie şi marginile.

Algoritmii lui Ford şi Bellman-Kalaba vor fi de asemnea folosiţi în această căutare a drumului critic şi a datei t_n de realizare a programului.

Iată, cu titlu de informaţie, aceşti doi algoritmi.

2.5.2. ALGORITMUL LUI FORD [1, 3]

1° Se notează fiecare vîrf E_t cu t_t; se începe prin a lua $t_{\pm} = 0$ şi $ti = 0$ pentru $i \hat{} = 1$.

2° Se caută un arc (/, j) astfel încît t, — < t_{ij}; se înlocuieşte
atunci t, prin

$$= ti + Uj > tj;$$

se va observa că t) > 0 dacă $j =f= 1$. Se continuă astfel pînă cînd nici un arc nu mai permite să-l mărim pe pentru orice *i* 1.

3° Există un vîrf E_{Pl} astfel încît

$$tm\ t_{I>l} - t_{P1\ n},$$

căci t_n a crescut monoton în cursul procedeului şi E_{Pl} este ultimul vîrf folosit pentru a-l mări pe $t_{„}$. La fel fie $E_{Pî}$ astfel încît.

$t_{Pl}\ t_{Pî} = t_{PlPi}$.

Şirul t_n, t_p,, t_{Pl}, ... fiind strict descrescător, se va ajunge la un anumit moment la situaţia $E_{Plc+r} = E_v$ Atunci t_n va fi valoarea drumului

cel mai lung de la E_k la E_n (data de realizare a programului) şi acest drum va fi

p. = [Uj $E_{„k}$, E_{n_v} ...., E_{Pi}, $E_{„}J.$

2.5.3. ALGORITMUL BELLMAN-KALABA [3]

Este o variantă a celui precedent prezentat cu ajutorul programării dinamice. El se bazează pe proprietatea evidentă următoare : orice drum maximal cuprinzînd cel mult *r* arce este format din drumuri parţiale conţinînd cel mult *k* arce *(k* C *r)* şi care sînt de ase**menea** maximale *).

Pentru orice arc *(i, j)* e II se pune = — oo; pe de altă parte pentru orice *i* se pune $t_{ti} = 0$.

Se propune găsirea unui drum

$$l^1 — [-®1, \quad • • • > \quad -®nl, \tag{2-18}$$

astfel incit

$$^li, + \quad + tiii, + • • • + n \tag{2-19}$$

să fie maximal.

E6te suficient să rezolvăm sistemul de ecuaţii:

$$Vi = MAX + v,), i = 1,2, ..., n — 1, \tag{2.20}$$

$$= 0,' \tag{2.21}$$

unde *Vi (i = 1,2,..., n* — 1) reprezintă valoarea drumului de la 1 la *n.* originea fiind vîrful 1 şi terminaţia vîrful *n.*

Se operează după cum urmează, punînd mai întîi:

$$®T = «_{in}, i = l,2, ..., n\text{-}l, \tag{2.22}$$

$$fl'»^{1'} = 0. \tag{2.23}$$

Se calculează apoi:

optimal **de** la vîrful *i* la vîrful final. Cele *n* vîrfuri sînt presupuse numerotate

♦) **Această proprietate este de asemenea adevărată dacă se**

consideră drumurile minimale şi drumurile parţiale minimale.

apoi succesiv :

$$r'\hat{i}' = \underset{?}{MAX} \qquad i = 1,2, \quad j = 1, 2, n, \qquad (2.26)$$

$$v<*> = 0, \qquad (2.27)$$

pentru toate valorile lui $k = 1,2,3,4,$-.. ; ne oprim cînd

$$i = 1, 2, ..., n . \qquad (2.28)$$

Atunci $v(\hat{i}')$ reprezintă valoarea drumului optimal între vîrfurile E_t şi $E_{„}$. Se demonstrează uşor că dacă graful are n vîrfuri, sînt suficiente n—2 iteraţii pentru a atinge optimul.

Este important de subliniat că algoritmul Bellman-Kalaba stabilit la început pentru căutarea unui drum cu valoarea minimală se aplică, aici, la căutarea unui drum cu valoare maximală, căci graful unui program nu conţine nici circuite, nici bucle, în caz contrar, lungimea, numărul arcelor conţinute de un drum putînd să nu fie finită, iar valoarea acestui drum nu ar fi mărginită.

2.5.4. EXEMPLU DE APLICARE A ALGORITMULUI BELLMAN-KALABA

Fie graful din fig. 2.30, unde numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori.

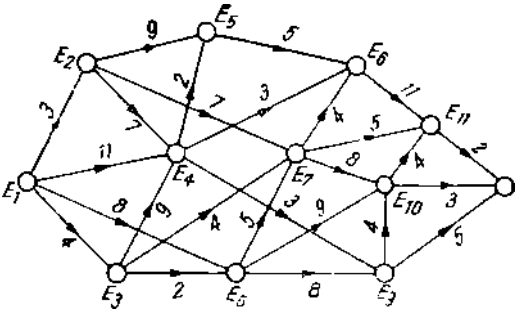


Fig. 2.30

Tabelul 2.1

	1	2	3	4	6	6	7	8	9	10	11	12
1	0	3	4	11	— 00	8	— 00	— 00	— oo	— 00	— 00	— 00
2	— 00	0	— 00	7	9	— oo	7	— 00	— 00	00 —	— 00	— 00
3	— 00	— 00	0	9	— 00	2	4	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00
4	— 00	— 00	— 00	0	2	~ 00	— 00	3	3	— 00	— 00	— 00
6	— 00	— 00	— oo	— 00	0	— 00	— oo	5	— 00	— 00	— 00	— 00
6	— 00	— 00	— oo	— 00	— 00	0	5	— 00	8	9	— 00	— 00
7	— 00	— 00	— 00	— 00	— oo	— 00	0	4	— 00	8	5	— 00
8	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— oo	0	— 00	— oo	11	— 00
9	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— oo	— 00	0	4	— 00	5
10	— 00	— 00	— 00	— 00	— oo	— oo	— 00	— 00	— 00	0	4	3
11	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	~ 00	— 00	— oo	— 00	0	2
12	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	— 00	0

Pentru a calcula valorile ale drumurilor optimale de la E_1 la E_{12}, s-a întocmit tabelul 2.1,, care reprezintă matricea valorilor

asociate grafului, apoi s-au calculat ..., prin formulele *(2.22)* — (2.28). Se obţine tabelul 2.2.

Tabelul 2.2

i / k	1	2	8	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	**— 00**	**— 00**	**— 00**	**— 00**	**— 00**	**— 00**	**— 00**	**— 00**	**5**	**3**		**0**
2	**— 00**	**— 00**	**— 00**	**8**	**— 00**	**13**	**11**	**|13|**	**7**	**Î6Î**		
3	**21**	**18**	**17**	**16**	**|18|**	**16**	**|17|**	**13**	**|**	**6**	**2**	**0**
4	**27**	**I[27]I**	**25**	**|20|**	**18**	**22**	**17**	**13**	**10**	**6**	**2**	**0**
5	**31**	**27**	**[29]**	**20**	**18**	**22**	**17**	**13**	**10**	**6**	**2**	**0**
6	**I[33]**	**27**	**29**	**20**	**18**	**22**	**17**	**13**	**10**	**6**	**2**	**0**
7	**33**	**27**	**29**	**20**	**18**	**22**	**17**	**13**	**10**	**6**	**2**	**0**

Să dăm detaliat o parte din calcul; să vedem, de exemplu, cum s-a obţinut = 16.

= MAX + ®<;>] =

= max [Z_{61} + *v'i}*, t_{62} + *v{?*, t_n + *v{?*, t_{6i} + *v{l'*, t_{65} + *v{l}*, r_{66}+®($_0^2$), ^67 + ^68 + ^69 + '[D<»)» ^6.10 + [1]lo', ^6.11 + ^6.12 +] =

= max [(— oo) + (— oo) , (— oo) + (—00) , (— 00) + (— 00),
(- 00) + 8, (- 00) + (- 00), 0 + 13, 5 + 11, (- 00) +13, 8 + 7, 9 + 6, (- 00) + 2, (_ 00) + 0] = 16.

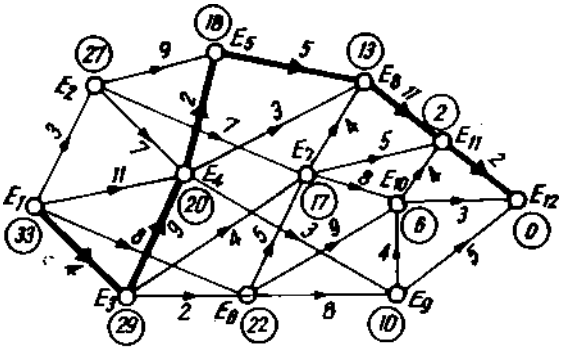


Fig. 2.31

Algoritmul Bellman-Kalaba revine la a căuta drumurile de lungiumea 1, apoi de lungimejnferioară sau egală cu 2, apoi de lungime inferioară sau egală cu 3 etc. mergînd de la *E,* la E_n şi toate de valori maximale, succesiv.

Rezultatele tabelului 2.2 sînt consemnate pe fig. 2.31. Numerele încadrate indică valorile drumurilor cu valori maximale din toate vîrfurile la vîrful final *E„.*

2.5.5. ALGORITM PRACTIC ÎN CAZUL GRAFURILOR FĂRĂ CIRCUITE

Am dat la începutul acestui paragraf o metodă generală, valabilă pentru cazul grafurilor fără circuite. Această metodă poate fi prezentată într-un alt mod cu ajutorul algoritmului următor, unde se propun alte notaţii mai simple.

1° Determinarea nivelelor grafului după metoda din 1.4.

2° Fie *X-L* o variabilă reprezentînd un element de nivel (1), x_2 o variabilă reprezentînd un element de nivel (2),.... x_n o variabilă reprezentînd un element de nivel (n),.... Fie x_0 elementul de nivel (0) şi x_N elementul de nivel (N), dacă graful posedă *N* -f- 1 nivele determinate pornind de la originea x_0. Se va calcula succesiv:

$$\text{®'i (rj} = \max \text{ ®}_{01} \text{ (}x_0\text{, } xj = \text{®}_{01} \text{ (}x_0\text{, rj,}$$

$$v_2\,(\text{ic}_2) \quad = \max \ [\text{rj} \quad (xj \quad + \text{®}_{12}(x_{\text{„}}\ \text{a?}_2)\text{J,[®}_{02} \ \ (x_0,$$

$$
\begin{aligned}
&\text{a}>_2)]\},\\
(\hat{}\text{a}) \;&=\; {}^{\max}\text{I}\;\overline{\text{MAX}}\;\; [V_2 \quad (\text{r}_2) \quad \text{-f-}\; \circledR_{23} \quad (\text{r}_2,\, x_3)\;],\\
&\quad\; \text{MAX} \quad (\text{ajj})\;\text{-ţ-}\; \text{r}_{13}(\circledR\text{j},\, \text{r}_3)]\;,\$93(\text{r}_0, x_3)/\\
<(x.) \;&=\; \max_{\text{l}\,*8}\text{JMAX} \quad (\text{r}_3) \;+\; v_M(x_3,\, \circledR_4)]\;,\\
&\quad\; \text{MAX}\; [v_2\,(x_2) + \quad (x_2,\, x_t)J\;,\\
&\quad\; MAX\,\text{o};\; (xj\;4\text{-} \quad (x_{lf}\;\circledR_4)]\;,\; v_M\;(x_0,\, \text{a?}_4)\text{l}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

unde $v_{tj}\ (x_t,\ x_j)$ reprezintă valoarea ataşată arcului $(x_{it}\ Xj)$. Se

$$\text{ia}\ v_{it}\ (x_{it}\ Xj) = 0 \text{ dacă } (x\hat{}\ Xj)\ \text{sU}^{\S\S\S}), \tag{2.30}$$

adică dacă nu există nici un arc între x_t şi x_j, de la x_ℓ către $x_,$.

înlocuind ****) MAX prin MIN, max prin min şi punînd

$$v_{iS}\ (x_{if}\ x\hat{} = \text{oo dacă (a?,, } Xj)\ \$\ \text{U}\ , \tag{2.31}$$

se va utiliza acelaşi algoritm pentru căutarea minimului intr-un graf fără circuite.

---

§§§ **Dacă Ia programarea la calculatorul electronic se enumără toate cuplurile $(x_{it}\ Xj)$ pentru a utiliza formulele (2.29), este convenabil atunci să luăm $v_,j\ (x_{it}\ \text{x},) = —$ oo (un număr negativ suficient de mare) dacă $(x_{It}\ Xj)$ $ U. Dar utilizind descompunerea in nivele (ceea ce un matematician numeşte *funcţia ordinală a grafului)* o astfel de enumerare poate fi evitată.**

**** **Obişnuim să scriem MAX cind trebuie să găsim un maxim in raport cu o variabilă şi max cînd trebuie să luăm maximul intr-o mulţime de valori numerice date. La fel pentru MIN şi n.in.**

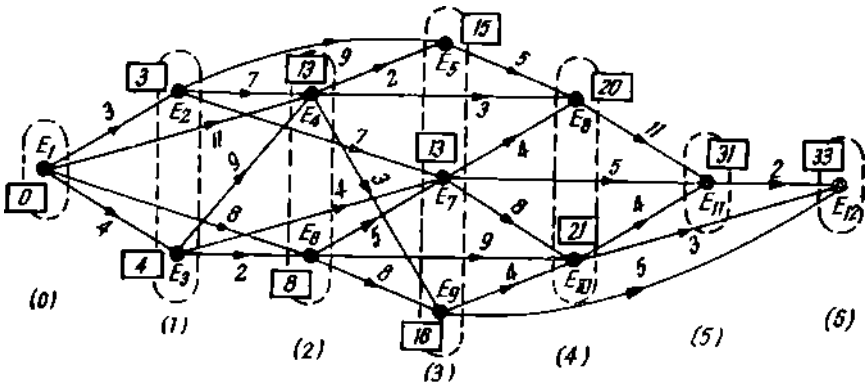


Fig. 2.32

Exemplul din fig. 2.30 a fost reluat în fig. 2.32, unde apar nivelele. Valorile v' $(x^{\wedge}$ sînt prezentate în interiorul micilor dreptunghiuri. Se poate vedea cu ce uşurinţă se fac astfel de calcule direct pe graf.

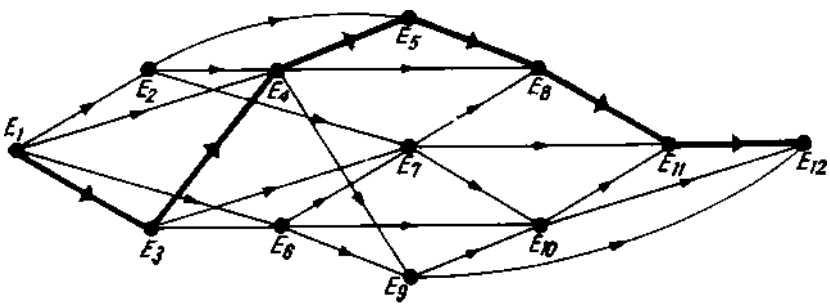


Fig. 2.33

2.6. DOUĂ EXEMPLE DE APLICAŢIE

2.6.1. PRIMUL EXEMPLU PREZENTAT PORNIND DE LA UN STUDIU AL LUI PACAUD ††††)

†††† **Seminarul de Cercetare operaţională (SOFRO),** ***Un exemplu de***

In paragrafele precedente, am arătat cum se stabileşte graful unui program de lucrări pornind de la relaţiile de ordine existente între operaţiile diferite, apoi, metoda drumului critic a permis deducerea datei de realizare a ansamblului lucrărilor, intervalele de fluctuaţie şi marginile operatorii.

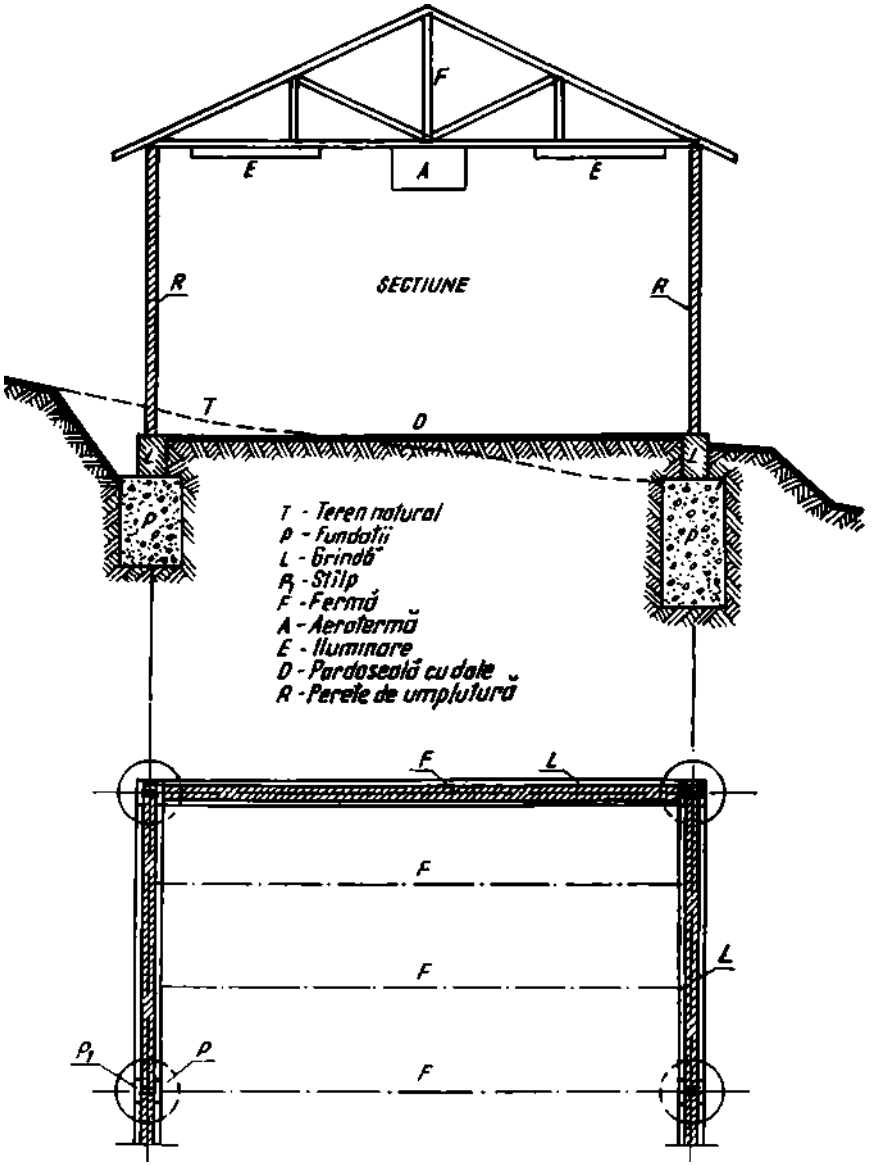
Astfel apare faptul că metoda drumului critic nu este, prin ea însăşi, o metodă de ordonanţare ‡‡‡). Ea nu se aplică decît grafului programului deja stabilit, adică atunci cînd s-a efectuat ordonan- ţarea lucrărilor. Eolul său este, de fapt, să interpreteze graful din- tr-un punct de vedere temporal şi să dea toate indicaţiile utile privitoare la datele de realizare a diferitelor evenimente ale programului.

Este evident că partea: stabilirea grafului programului, adică partea din studiu care face apel efectiv la căutarea ordonanţării, este cea mai importantă, cea mai lungă şi cea mai delicată. Intr- adevăr, relaţiile de ordine dintre operaţii nu sînt întotdeauna imperative, nici bine determinate, anumite operaţii putînd fi întreprinse

---

aplicafie a teoriei grafurilor la ordonanfarea unui şantier **de Pacaud, Director General la A-PRO-BA-**

‡‡‡ în sensul pe care îl dau adesea acestui cuvînt organizatorii şi analiştii cercetării operaţionale. în paragraful de faţă cuvîntul ordonanţare va fi luat în acest sens.



Pionul unei Iravee

Fig. 2.34

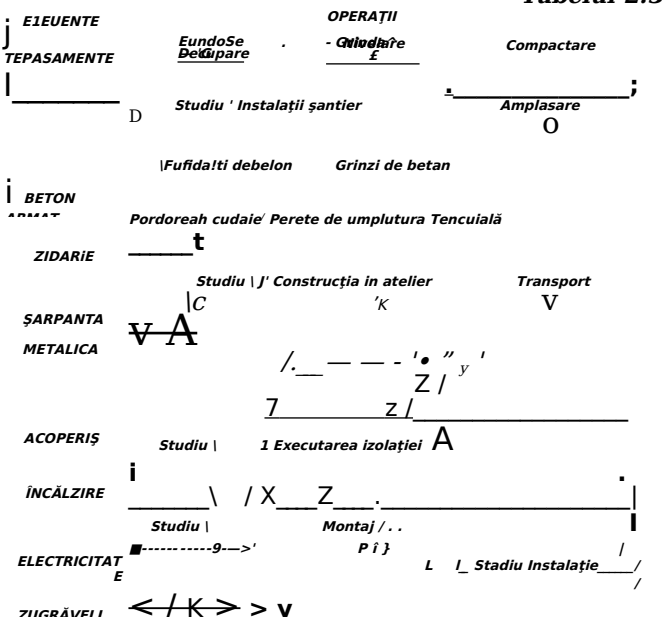
înaintea îndeplinirii complete a unei operaţii precedente (operaţii compuse). Există astfel, în practică, mai multe moduri de a stabili programul unui ansamblu de lucrări şi graful său.

Vom prezenta un exemplu care va ilustra aceste preocupări de ordonanţare şi vom arăta cum metoda drumului critic permite testarea diferitelor grafuri ale aceluiaşi ansamblu de lucrări.

Acest exemplu se referă la construcţia unei clădiri industriale cu 5 travei. *)

Iată tabelul diferitelor operaţii. Săgeţile punctate reprezintă relaţiile de ordine între operaţii. Proiectul începe prin operaţiile A, *B* şi *E.*

Tabelul 2.3



Timpii operatori sînt indicaţi în tabelul 2.4 (în zile). Putem trasa, atunci, graful programului (fig. 2.35).

Tabelul 2.4

A **- 10**	***H*** **- 20**	***B*** **- 35**
B **- 3**	***I*** **- 4**	**S - 40**
C - 15	***J*** **- 18**	***T*** **- 2**
D **- 10**	***K*** **- 60**	***U*** **- 20**
E **- 15**	**L — 20**	**V - 20**
F **- 5**	***M*** **- 5**	**IV - 35**
G - 30	***N*** **- 25**	**X - 55**

Au trebuit introduse două operaţii virtuale care sînt punctate pe figură, Numerele notate în vîrfurile grafului sînt datele aşteptate ale evenimentelor corespunzătoare. Vîrful terminal poartă data 250. Ansamblul lucrărilor va fi deci terminat în 250 de zile. Drumul critic este figurat prin trăsături groase.

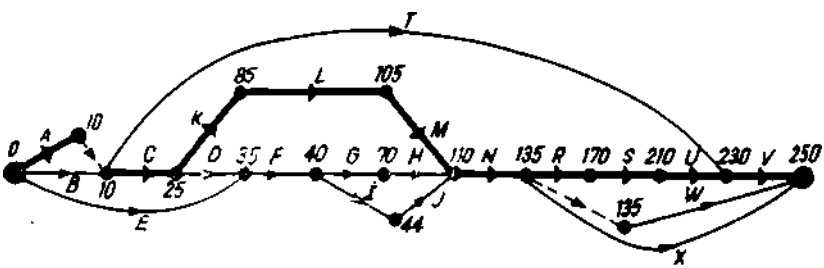


Fig. 2.35

Dar anumite operaţii pot fi descompuse ; altfel spus, pot fi întreprinse acele operaţii care urmează înainte de terminarea completă a precedentelor. Aceasta se va produce, dacă clădirea se construieşte travee cu travee. Diferite programe pot fi atunci examinate, fiecare dintre ele corespunzînd unei organizări diferite a şantierului.

1° *Programul obţinut construind cu prioritate prima travee*

Operaţiile descompuse sînt *A, C, K, L, M, N, P, S, U, V.*

Desemnarea operaţiilor şi timpilor operatori sînt indicate în tabelul 2.5.

Tabelul

Operaţii	Timpii
A_2 Studiu pierderi, alegere aeroterme, traseu, deviz greutate suspendată	10 *A*
A_2 Studiu execuţie a instalaţiilor de încălzire	
B Studiu acoperiş	3
Cj Notăm calcule, deviz greutate şarpantă	5
C_2 Studiu execuţie şarpantă	10 — 15 C
D Studiu beton armat	1
E Terasamente generale	0
F Amplasare, instalaţii şantier	1
G Terasamente fundaţii	5
H Beton fundaţii	5
1 Terasamente grinzi	3
J Beton grinzi	1
Kj Fabricarea şarpantei primei travee lemn	12
K_2 Fabricarea celorlalte patru travee	48 — 6
Lj Strat protecţie al primei travee	4
JL$_2$ Strat protecţie al celorlalte pentru travee	16
Transport prima travee	
M_2 Transport celelalte patru travee Montaj ridicare prima travee	
N_t Montaj ridicarea celorlalte patru travee	5
Montaj instalaţii de Incălzirre prima travee	20
Montaj celelalte patru travee	7
Sj Zugrăveli prima travee	28 — 35
S_2 Zugrăveli celelalte patru travee	8
T Studiu instalaţii electrice	40 S
Uj Izolaţii acoperiş prima travee	3
	2
U_2 Izolaţii acoperiş celelalte patru travee	2
Instalaţii electrice prima travee	4 — 20 *U*
V_2 Instalaţii electrice celelalte patru travee W	4
Pardoseală cu dale	16
X Tencuirea pereţilor de umplutură	3
	5

Acum se poate trasa graful acestui nou program şi calcula datele aşteptate ale diverselor evenimente ale programului (fig. 2.36). 8e vede că data evenimentului final este acum 210. S-au cîştigat deci 40 zile descompunînd anumite operaţii. Ca şi mai înainte, operaţiile punctate sînt operaţii virtuale, a căror motivare a fost indicată în 2.2.

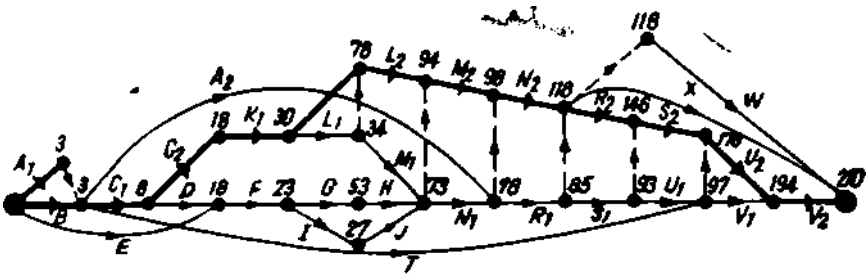


Fig. 2.36

2°. *Programul obţinut construind cu prioritate două travee* Noii timpi operatori sînt :

Tabelul 2.6

K₁ **- 24**	**N, - 10**	**17,-8**
K„ **- 36**	***N₂*** **- 15**	***Ui*** **- 12**
— 8	**- 14**	**V,- 8**
L₂ **- 12**	**R₂ - 21**	**V₂ - 12**
JW, - 2	**S, - 16**	
M₂ **- 3**	**S₂ - 24**	

Ceilalţi timpi operatori rămîn neschimbaţi. Se obţine graful **din** fig. 2.37. Data evenimentului final este 177. S-a redus deci din nou durata ansamblului lucrărilor.

3° *Programul obţinut construind cu prioritate trei travee* Noii timpi operatori sînt:

Tabelul 2. 7

	N,	
«i- 36	**- - 15**	***u_t*** **-- 12**
***2 -** **24**	**A» - 10**	***u₂*** **-- 8**
il - 12	**-- 21**	**V!-12**
L₂ **- 8**	**«2 - 14**	**v,-- S**
- 3	**Si -- 24**	
M₂ **- 2**	**s₂ -- 16**	

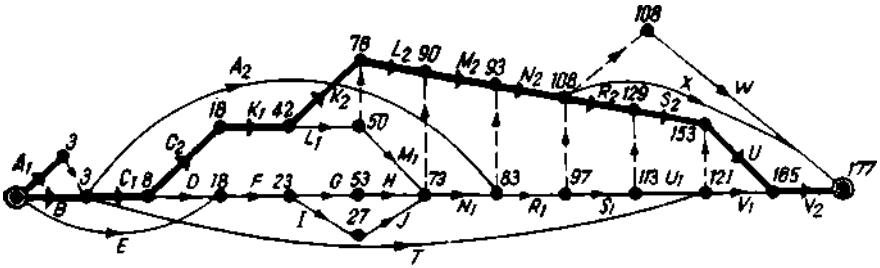


Fig. 2.37

Ceilalţi timpi operatori rămîn neschimbaţi. Se obţine graful din fig. 2.38. Data evenimentului final este 165.

Operaţiile critice sînt redate cu linii groase.

Am prezentat trei programe corespunzînd la trei organizări posibile ale şantierului, însă mai există şi altele.

Interesul acestui exemplu era de a da o privire generală asupra a ceea ce s-a convenit să se numească *probleme de ordonanţare* şi de a arăta cum metoda drumului critic permite să alegem între mai multe programe ale aceluiaşi ansamblu de lucrări. în exemplul nostru, vom alege programul trei care dă un termen total de execuţie de 165 zile.

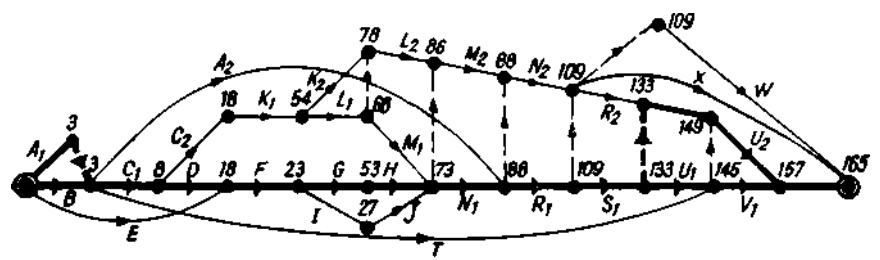


Fig. 2.38

2.C.2. AL DOILEA EXEMPLU

Acest nou exemplu ne-a fost comunicat de B. Roy şi a fost extras dintr-un studiu făcut de Rosinski §§§§), exemplul

§§§§ **A se consulta lucrarea *Les Probltmes d'ordonnancement,* SOFRO, Dunod, 1964.**

ilustrîndu-ne importanţa metodei potenţialelor în problemele de ordonanţare, la fel cu uşurinţa sa de aplicare. Problema pusă este aceea a realizării ciclului zilnic pentru o nouă unitate de tunele-cofraje concepută în vederea realizării fundaţiilor unui microraion de locuinţe. Să precizăm, mai întîi, că operaţiile de grutaj necesită în total aproape 10 ore pe ciclu şi că între ele trebuie intercalate anumite lucrări manuale (9 ore de lucru pentru un muncitor în medie); se concepe că realizarea unui plan executabil în mai puţin de 12 ore ar fi delicată.

Figura 2.39 reprezintă graful asociat acestei probleme. Datele (durate, lungimi de arce) sînt relative la cadenţele de lucru minimale (semnul -f- indică duratele şi arcele „comprimabile").

Se vor nota printr-o încadrare dublă sarcinile recurgînd la macara. Se va observa de asemenea prezenţa restricţiilor de formă particulară între sarcinile 104 şi 106 exprimînd că acestea sînt *legale* în execuţia lor (106 trebuie să înceapă cu 25 de minute după 104_r nici mai înainte, nici mai tîrziu); este una din posibilităţile formulării prin metoda potenţialelor. Lăsăm de o parte din cauza spaţiului descrierea completă a operaţiilor.

Pe aceste baze, se va putea aplica unul din algoritmii (din 2.5) grafului din fig. 2.39 şi se vor obţine astfel datele de început ale primelor sarcini care figurează pe acest graf.

Se constată imediat contradicţii: de exemplu, sarcinile 23 şi 51 pe de o parte, 6, 9 şi 10 pe de altă parte (şi încă altele) fac apel simultan la macara, ceea ce este imposibil.

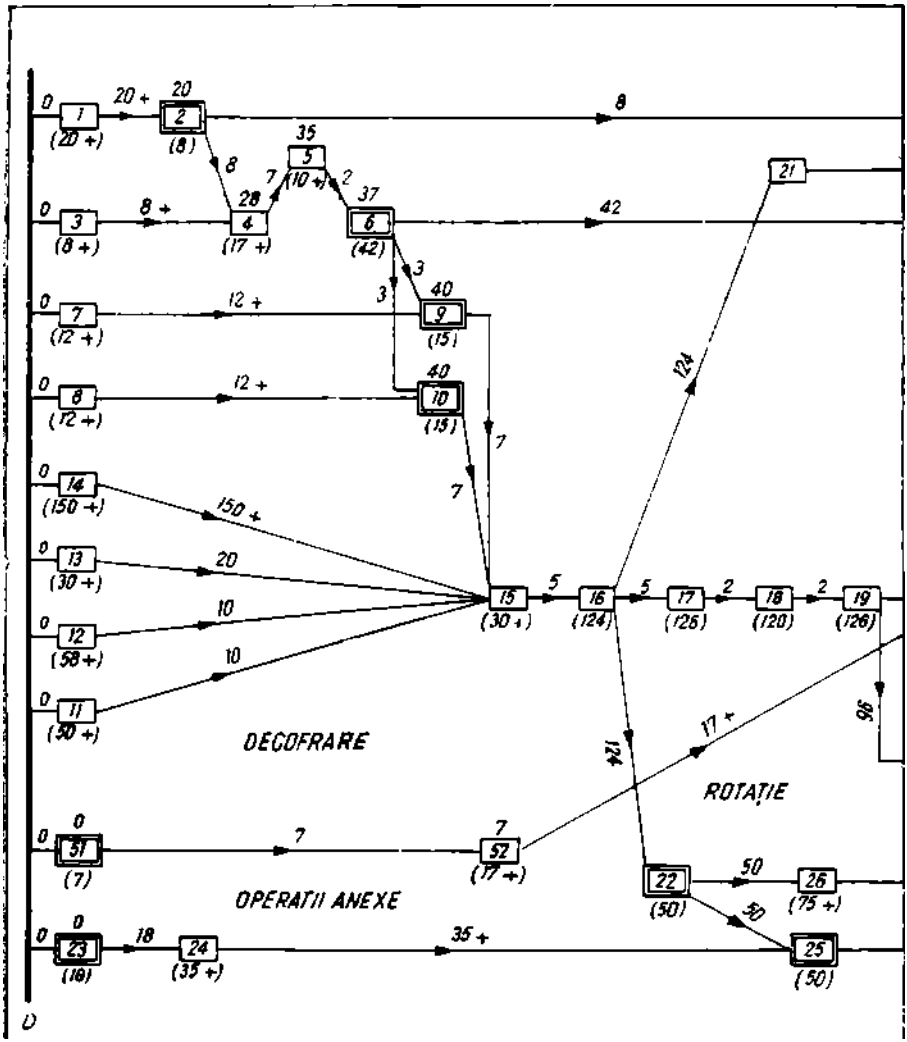
O regulă de arbitraj de felul ,,primul venit — primul servit" permite eliminarea acestor contradicţii şi dă adesea soluţii apropiate de optim, procedînd după cum urmează:

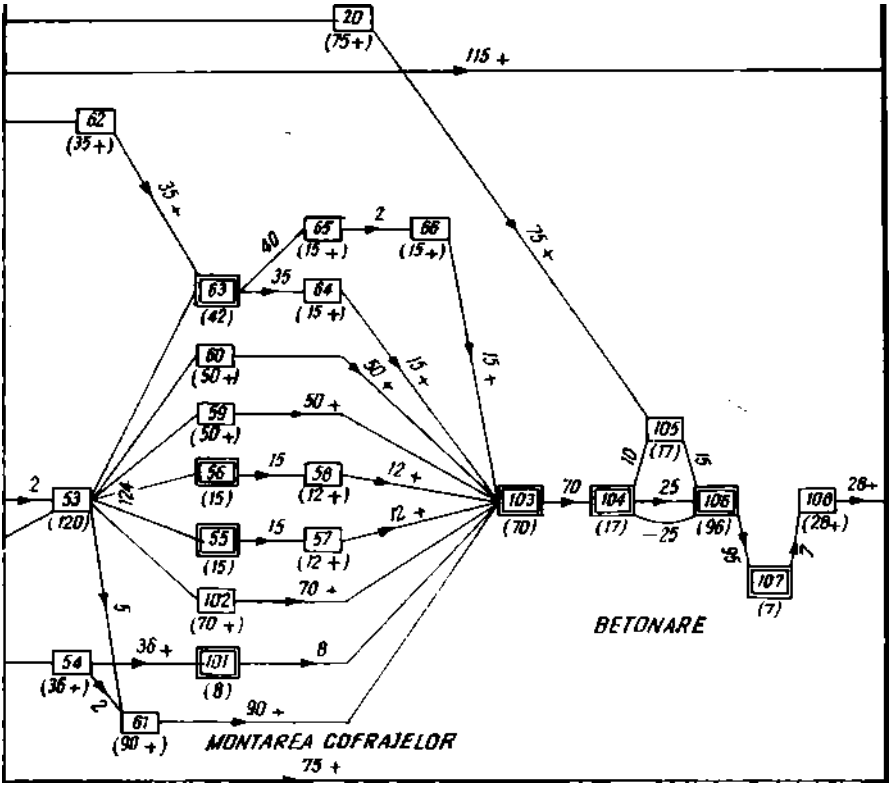
— calculul se face cu ajutorul algoritmului ales, dar clasificînd momentele' de început Z, în ordine crescătoare,

— dacă există o *disjuncţie* între două sarcini *i* şi *j* (Z,- ZJ, ea elimină cu ajutorul unei restricţii potenţial suplimentare :

unde dj este durata sarcinii *i,* ea impunînd lui *j* să urmeze după *i.*

Putem urmări procesul pe graful figurii 2.40 care dă prima soluţie : sarcina 51 trebuie să urmeze sarcinii 23 (Z_{51} = t_{22}, arbitraj asupra numărului sarcinii) şi trebuie să preceadă sarcinii 2...


0
1
(20 +)
20 +
20
2
(8)
8
35
5
(10 +)
7
2
28
4
(17 +)
8 +
0
3
(8 +)
37
6
(42)
3
3
40
9
(15)
0
7
(12 +)
12 +
40
10
(15)
0
8
(12 +)
12 +
7
7
0
14
(150 +)
150 +
0
13
(30 +)
20
0
12
(58 +)
10
0
11
(30 +)
10
DECOFRARE
15
(30 +)
5
16
(124)
5
17
(126)
2
18
(120)
2
19
(126)
8
42
21
124
124
17 +
96
ROTATIE
0
0
31
(7)
7
7
52
(17 +)
OPERATII ANEXE
22
(50)
50
26
(75 +)
50
0
0
23
(10)
18
24
(35 +)
35 +
25
(50)
0



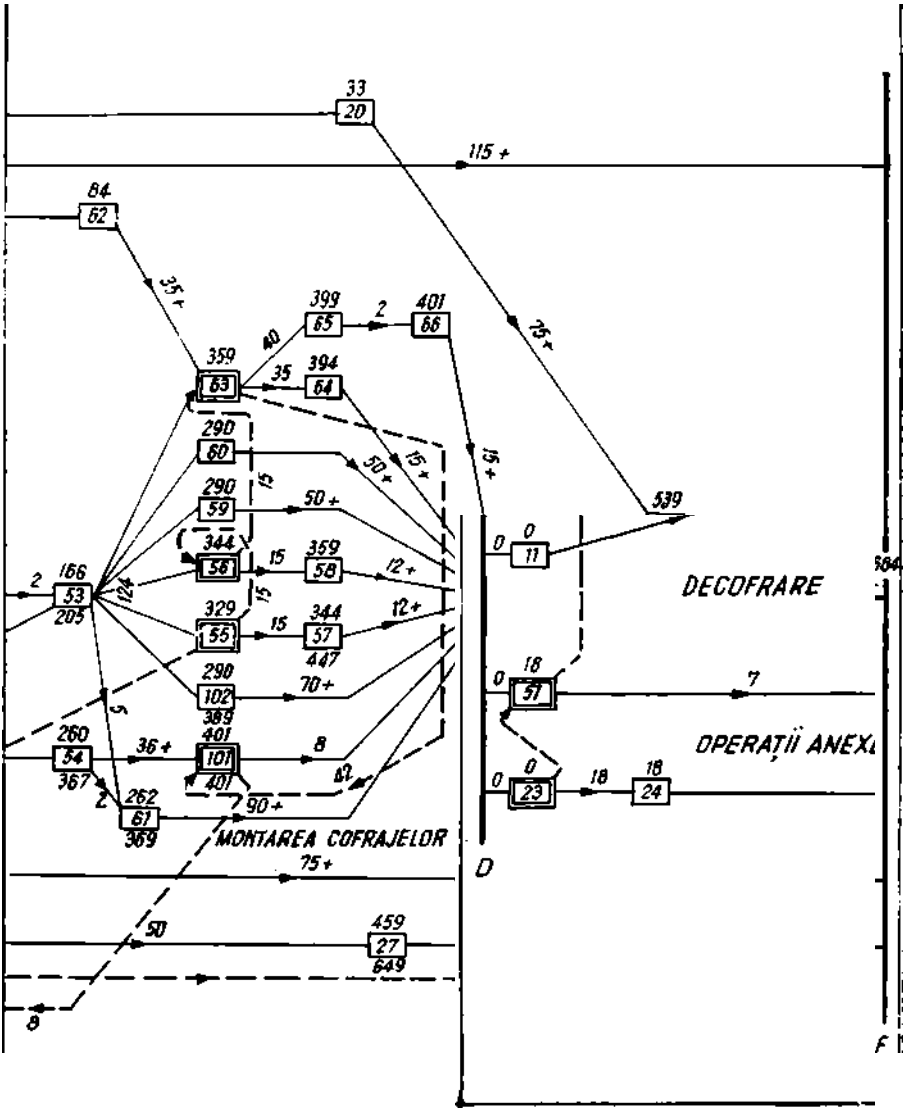
DATELE DE BAZA

7 *Data de începere*

[37] *Sarcina nr. 52.*

(17+) Duratamaxima 17minute,comprimaiile'

II // *Sarcini cu grutaj*



— *- —Restricţii disjunctive

Drum critic

3U Valoarea iui ti 'data cea mai apropiata 1 571

447 Valoarea lui tpdata cea mai tirue

Calculul datelor limită/* sau al datelor „cele mai tîrzii” se face în continuare, fără a ţine seama de disjuncţii, pornind de la graful prevăzut cu arce disjunctive (punctate pe figură). Toate datele nu figurează pe desen pentru a nu-l încărca prea mult. Această primă soluţie are deja o durată inferioară lui 12 h (684 minute).

Trecerea de la o soluţie la alta mai bună se face prin revizia şi explorarea sistematică:

— a ipotezelor asupra cadenţelor de lucru,

— a modului de tratare a restricţiilor disjunctive.

Pentru a comprima durata totală, trebuie accelerată execuţia sarcinilor drumului critic.

Eliminarea unei disjuncţii printr-o restricţie *potenţial* este o decizie arbitrară, şi se poate întotdeauna lua în consideraţie inversarea ordinii astfel impuse. Apriori, aceasta conduce la încercarea unui număr foarte mare de combinaţii. Pentru a elimina sistematic pe cele mai puţin bune, se poate utiliza regula următoare :

— parcurgînd arcele drumului critic de la origine, să se inverseze primul arc disjunctiv întîlnit;

— să se refacă calculul acestui nou program fără a se atinge de celelalte arce disjunctive.

Acest procedeu se justifică cum urmează :

— inversarea unui arc nesituat pe drumul critic nu l-ar scurta pe acesta, căci el nu împrumută acest arc; ea poate însă să-l lungească şi arcul devine atunci critic;

— inversarea unui arc, eliminînd anumite disjuncţii, poate autoriza un program mai scurt; ar conveni deci, în acelaşi timp, să se elimine restricţiile disjunctive devenite inutile sau acelea care ar putea să se opună unei astfel de ameliorări. Dar, în acest din urmă caz, arcele despre care este vorba devin critice şi vor fi deci reexaminate într-un stadiu următor.

Se vede că acest procedeu simplu nu elimină nici o soluţie, bună, dar nu ameliorează programul la fiecare iteraţie. El permite totuşi să se cîştige timp şi să obţinem rezultate bune în acest caz.

Pentru prima soluţie, sarcina 14 — lungă dar puţin importantă — ar întîrzia ansamblul operaţiilor. Ar fi suficient să dublăm efectivul corespunzător pentru a cîştiga 44

minute. Dar în soluţia 2 arcele disjunctive legînd sarcinile 23,51 şi 2 ar deveni critice; inversarea arcului 51 -> 2 ar da soluţia 3. Practic, această soluţie ar fi cea mai rapidă: arbitrajele disjunctive situate dincolo de sarcina 15 ar fi sensibil optimale, şi rarele sarcini comprimabile situate pe drumul critic ar interveni la momente cînd încărcarea personalului ar fi vizibil foarte mare. Dar utilizatorul alege în definitiv o soluţie mai puţin bună: pentru o pierdere de cîteva minute, este preferabil pentru motive de securitate să se execute împreună şi mai devreme sarcinile 22, 25 şi 26 (deplasarea şi aşezarea pasarelelor mobile de circulaţie). Figura 2.41 dă soluţia reţinută: durata totală s-a redus la 639 minute.

Obiectivul căutat — realizarea ciclului zilnic — ar putea fi deci atins, cu un efectiv inferior celui folosit înainte şi aceasta cu preţul unei investiţii mici faţă de cheltuielile în joc.

2.7. OPERAŢII CU DURATA ALEATOARE

Cititorul a luat cunoştinţă acum de aspectele principale pe care le oferă utilizarea unui graf pentru reprezentarea unui program de cercetări sau de producţie, în cazul în care duratele operaţiilor sînt cunoscute şi sigure. Importanţa unei astfel de aproximări a unui program de cercetări sau de dezvoltare este evidentă :

— Planificatorul sau organizatorul au, datorită folosirii grafului, o prezentare clară şi simplă a programului în care apar interacţiunile diferitelor lucrări. Stabilirea grafului este deci, în sine, o primă fază foarte importantă, care permite să se precizeze desfăşurarea operaţiilor.

— Punerea în evidenţă a unuia sau a mai multor drumuri critice permite determinarea operaţiilor care condiţionează desfăşurarea ansamblului programului. Aceste aplicaţii critice vor trebui deci, în cursul realizării, să fie supravegheate foarte de aproape şi asupra lor se va îndrepta efortul principal.

— Operaţiile diferite de cele ale drumului critic apar, din contră, mai puţin rigide şi tolerează anumite întîrzieri

relative la datele lor de punere în execuţie (intervale de fluctuaţie, margini libere).

In practică, în foarte multe programe în primul rînd la cele de cercetare şi de dezvoltare, duratele ale operaţiilor sînt insuficient cunoscute şi nesigure. Se pot prezenta atunci două cazuri: sau operaţiile, despre care este vorba, nu sînt noi şi se cunoaşte pentru fiecare dintre ele într-un mod aproximativ legea de repartiţie a probabilităţilor timpului operator, sau aceste operaţii sînt în întregime noi, sau foarte puţin cunoscute şi nu se cunoaşte legea de repar-

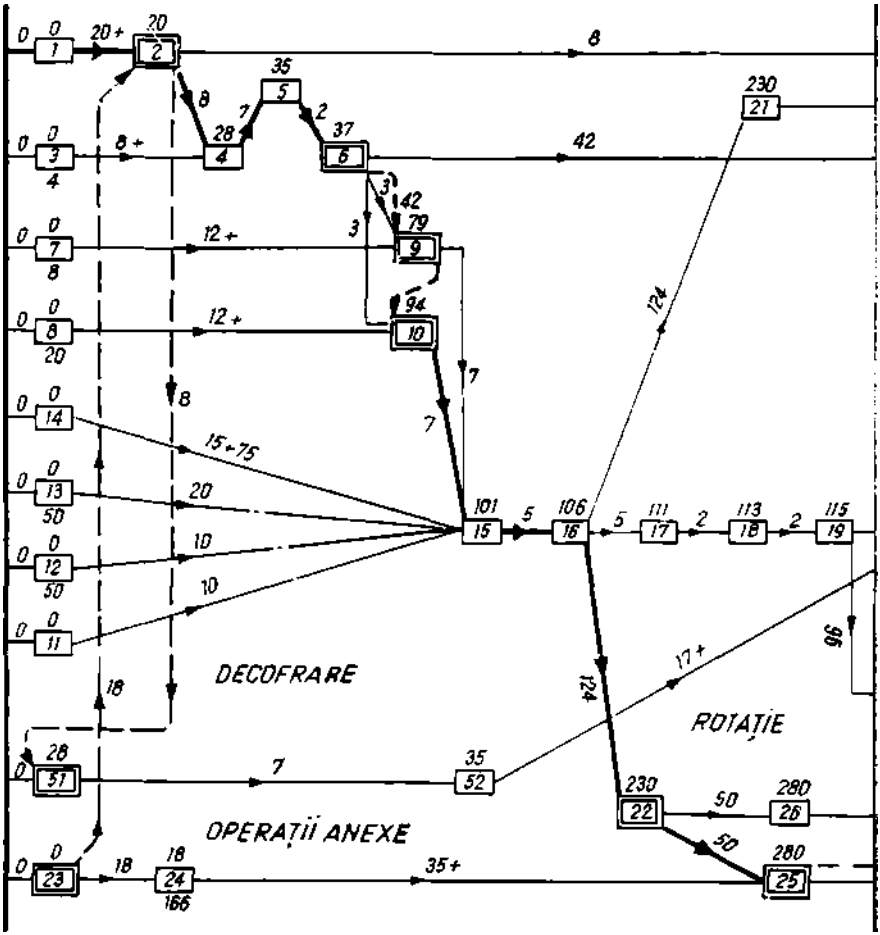
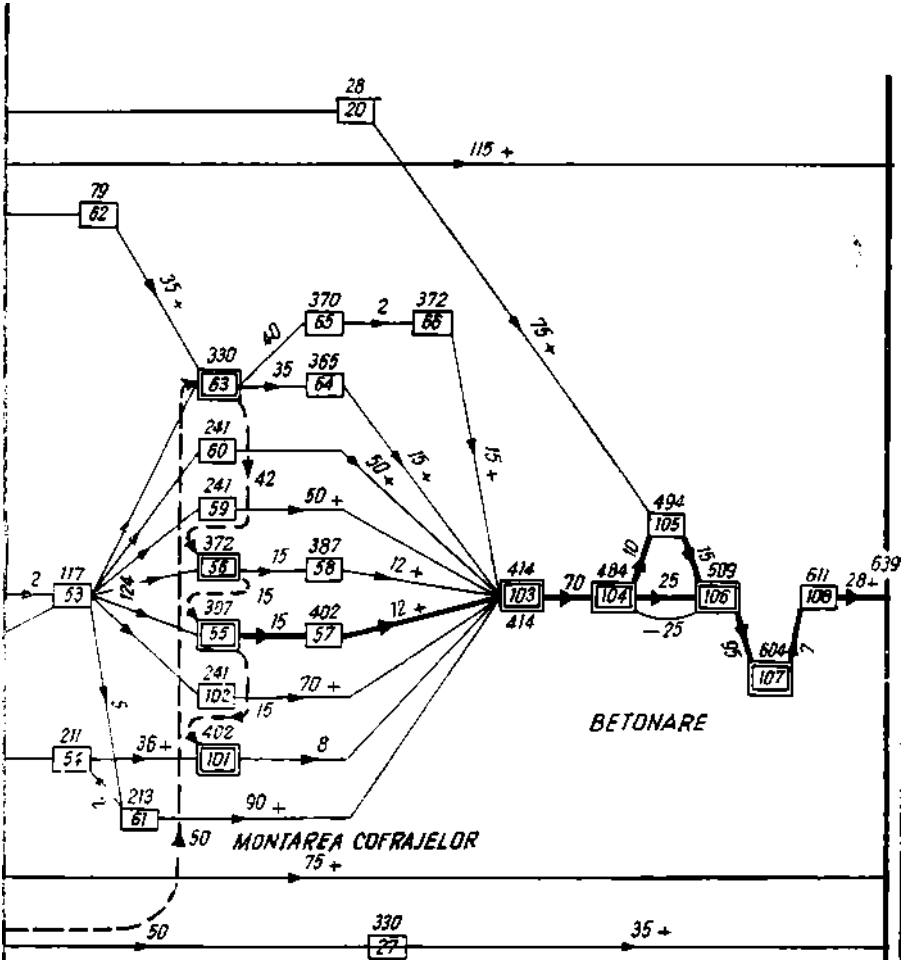


Fig. 2.41
a



ORDONANŢARE OPTIMALA

F

18 *Valoarea lui*

166 *Valoarea reţinută (daca Ţ t '$_L$)*

Drum critic

Fig. 2.41 q tiţie a fiecărui timp operator. Primul caz corespunde, în general, programelor industriale de dezvoltare, al doilea — programelor de cercetare.

1) Dacă se cunosc repartiţiile timpilor operatori, nu există dificultăţi pentru determinarea duratei medii (speranţa matematică,) şi a dispersiei fiecărei operaţii.

Se obţine astfel:

$$*u \text{ Şi } ®?_r$$

2) Dacă nu se cunosc distribuţiile timpilor operatori, se presupune, în metoda PERT, pentru motive de comoditate în calcule, că aceşti timpi operatori urmează o lege de repartiţie p *).

Nu se poate justifica într-un mod riguros alegerea acestei legi, avînd o funcţie de densitate de probabilitate de tip Gauss-Laplace, dar este mărginită la stînga şi la dreapta.

Figura 2.42 dă curba care reprezintă o lege de probabilitate p. Legea p considerată în metoda PERT a fost aleasă astfel încît:

$$E(t) = t = \frac{}{6}(\text{J.} + 4\text{Jf} + B), \tag{2.32}$$

$$\sigma_t^2 = \left[\frac{1}{6}(B - A)\right]^2,$$

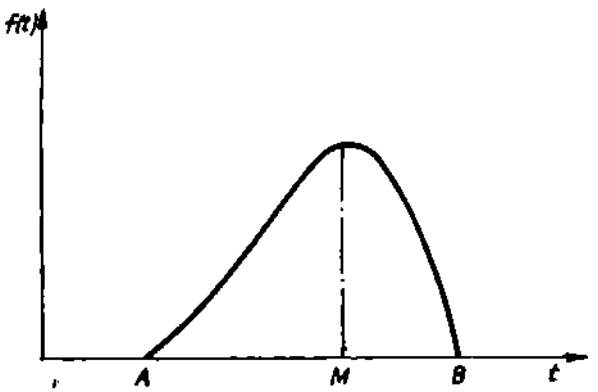


Fig. 2.42 Repartiţia β.

') Vezi în anexă, o relatare privind această lege.

A, *B* fiind marginile inferioară şi superioară ale variabilei aleatoare t_f *M* fiind valoarea cea mai probabilă sau moda.

Specialiştii responsabili cu fiecare operaţie sînt chestionaţi, pu- nîndu-li-se următoarele trei întrebări:

1) La cît estimaţi durata minimală a operaţiei P_{iS} (estimaţie optimistă) î Fie a_{ij} această durată minimală.

2) La cît estimaţi durata maximală a operaţiei P_{tj} (estimaţie pesimistă) î Fie b_{ti} această durată maximală.

3) Care este durata cea mai probabilă a lui P_{tj} (moda) î Fie wi_{i3} durata cea mai probabilă.

Astfel de informaţii fiind subiective se convine să fie strînse cu anumite precauţii. în particular, se stabileşte să se realizeze legături între diferitele informaţii provenite de la specialiştii într-o aceeaşi operaţie (de exemplu, un şef de laborator şi adjuncţii săi) care ar trebui eliberate de orice forme de presiuni exterioare, care ar putea deplasa estimaţiile.

Deoarece nu cunoaştem nimic, vom presupune că aceste informaţii constituie estimaţii nedeplasate ale lui A_{ijt} B_{tJ}, M_{ij}. Fie:

$$= \qquad = \tag{2.34}$$

Putem scrie atunci

$$\overset{\wedge}{t_{ii}} \qquad A_{;,} \text{-|-} \qquad 4\text{-}\, B_{\{j} \Big] = \frac{1}{6}[a_{ij} + 4m_{ij} + \tag{2.35}$$

Notaţia t_o are semnificaţia că valoarea celui de-al doilea membru al ecuaţiei (2.35) constituie o estimaţie nedeplasată a valorii medii $t_{(j;}$ t_{if} este un estimator al lui t_0.

Din punct de vedere teoretic, nu avem dreptul să scriem

$$\left[\frac{\hat{B}_{ij} - \hat{A}_{ij}}{6}\right]^2 = \left[\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}\right] \tag{2.36}$$

consideraţie aproximaţiile făcute (asimilarea estimaţiilor subiective cu estimaţiile obiective) şi ipotezele complet empirice admise mai înainte, nu este cu totul greşit de a lua ca estimaţie a dispersiei valoarea

Am obţinut aBtfel, cu un anumit număr de concesii la rigoare, esti- maţii ale duratei medii a operaţiei _P_{j3}- şi a dispersiei timpului său operator. Vom reţine aceste estimaţii şi vom scrie suprimînd bara şi / Bau accentul circomflex :

$$t_{ij} = \frac{1}{6}(a_{ij} + 4m_{ij} + b \qquad (2.37$$

$$\mathbf{2} = \qquad (2.38)$$

Avînd astfel pentru fiecare operaţie valoarea medie şi «dispersia uf, a timpului operator, fie că sîntem în cazul în care se cunoaşte legea de repartiţie, fie că sîntem în cazul empiric, cînd se posedă numai informaţii apriori, se foloseşte metoda din 2.3 pentru determinarea valorilor medii ale evenimentelor E_t şi a drumului critic (sau a drumurilor critice), afectînd fiecărui arc valoarea medie *tij* a timpului operator.

într-adevăr, ştim că valoarea medie a unei sume de variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii a

$$+ X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

fiecăreia dintre variabile :

$E\{X_t + X_2 + .. . + X_n) = E(XJ + E(X_2) + ... + E(X_n),$ (2.39)

unde simbolul E reprezintă valoarea medie a variabilei aleatoare X_v Să reluăm exemplul din fig. 2.22 presupunînd că ne găsim în cazul nesigur.

Valorile afectate arcelor din fig. 2.22 vor reprezenta acum valorile cele mai probabile m_d. Valorile a_{tj} şi b_d sînt date în tabelul 2.8, unde am calculat şi prin formulele (2.37)

şi (2.38)

A fost reluat acelaşi exemplu din motive de simplificare a expunerii. Trebuie să remarcăm totuşi că de fapt cele două probleme sînt diferite. Vom reproduce pe fig. 2.43 graful reprezen- tînd programul. Fiecare arc reprezentînd o operaţie este afectat cu valoarea calculată şi care se poate citi pe tabelul 2.8. Numerele subliniate şi înscrise aproape de vîrfurile grafului reprezintă acum valorile medii ale datelor evenimentelor E_t. Astfel evenimentul E_{10} se va produce la o dată medie 47,99, evenimentul E_n la o dată medie de 41,16 şi evenimentul E_{12} care reprezintă terminarea lucrărilor la o dată medie de 60,82 *****).

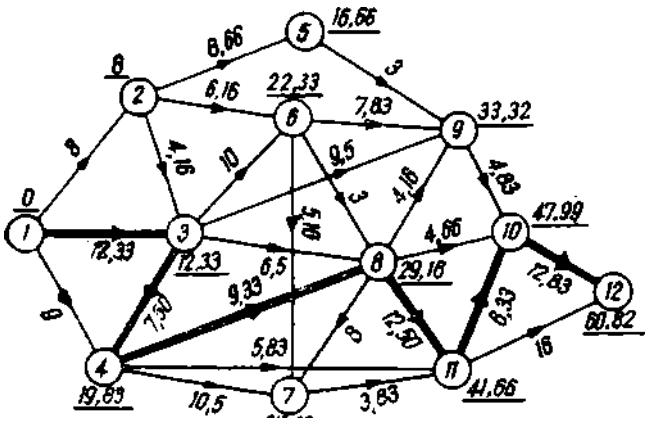


Fig. 2.43

Vom putea merge mai departe în cunoaşterea programului, ob- servînd că la capătul unui anumit număr de operaţii datele evenimentelor corespunzătoare sînt repartizate după legea normală, în virtutea *teoremei limită centrale* pe care o reamintim în cele ce urmează:

Fiind dat un şir de variabile aleatoare *independente*

***** **Se găseşte că drumul critic al valorilor medii este acelaşi cu drumul critic al valorilor celor mai probabile (mode), dar acesta este un caz particular datorat valorilor introduse in exemplul nostru.**

$_1, X_2, \ldots, X_n$

Tabelul 2.8

[p]<>	[a]H	[b]<>	[m]u	'u	
	5	11	8	8	1
Pi.a	6	16	13	12,33	2,77
Pi.e	6	12	9	9	1
	3	6	4	4,16	0,25
P_t.o	4	12	9	8,66	1,77
P_t.e	3	10	6	6,16	1,36
^3.4	5	12	7	7,50	1,36
■^3.6	6	14	10	10	1,77
■^s.e	4	11	6	6,5	1,36
■P3.3	7	14	9	9,5	1,36
^4.7	7	16	10	10,5	2,25
■P4.8	8	12	9	9,33	0,44
^4.11	4	7	6	5,83	0,25
^5.»	2	4	3	3	0,11
■^e.7	4	7	5	5,16	0,25
■P«.s	2	4	3	3	0,11
^e.e	5	10	8	7,83	0,69
P7.11	2	5	4	3,83	0,25
■^8,7	7	9	8	8	0,11
Pe.»	3	6	4	4,16	0,25
Pe.10	2	6	5	4,66	0,44
P».n	7	16	13	12,50	2,25
PfhlO	3	6	5	4,83	0,25
Pion	8	17	13	12,83	2,25
Pll-10	5	9	6	6,33	0,44
Pun	9	19	17	16	2,77

cu dispersiile

$$\text{tfl}?^{2}\,^{2}\,^{2}\bullet\bullet\bullet\,\text{j}$$

dacă dispersiile sînt finite şi suma lor creşte indefinit cu *n,* dar astfel incit fiecare raport

$$\frac{\text{G?/S a?}}{i}$$

tinde la 0, atunci variabila

$$= Z_{n} - E(Z_{n}) \text{ cu } z_{j} = \frac{}{\%} \qquad (2,41)$$

urmează, la limită, o lege de repartiţie normală redusă, oricare ar fi distribuţiile variabilelor X_{f}.

Această înseamnă că o sumă de variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele avînd o repartiţie oarecare, urmează, dacă numărul acestor variabile este suficient de mare, o lege normală (legea Gauss-Laplace), a cărei medie este suma mediilor variabile şi a cărei dispersie este suma dispersiilor variabile ††††) :

$$E(Z_{n}) = E(XJ + E(XJ + ...+ E(XJ, \qquad (2.42)$$

sau

$$+ \bullet \bullet \bullet + \qquad (2\text{-}43)$$

Teorema limită centrală se aplică bine, dacă graful programului este suficient de mare pentru evenimentele de la sfîrşitul programului şî în particular pentru evenimentul final, reprezentînd terminarea ansamblului lucrărilor. Trebuie totuşi să remarcăm imediat că aceasta nu este valabilă decît cu condiţia ca timpii operatori să fie variabile

---

†††† **Sub rezerva condiţiilor foarte generale care slnt satisfăcute in cazul in care se presupune că legile de repartiţie slnt repartiţii |3.**

♦) Totuşi, dacă se admite ipoteza că variabilele aleatoare considerate pe arcele grafului slnt repartizate după legea Ş, se poare arăta că suma acestor variabile urmează foarte sensibil o lege normală, chiar dacă se face suma unui număr mic de astfel de viri abile.

aleatoare *independente,* ceea ce se admite în general, dar care poate să nu se întîmple în anumite cazuri. În tot cazul, aceasta este o ipoteză care trebuie examinată în fiecare caz. Astfel, în exemplul nostru, data evenimentului Z_{J2} este repartizată după legea Gauss-Laplace de medie 60,82 şi de dispersie egală cu suma dispersiilor timpilor operatori care compun drumul critic.

Numind sau mai simplu Z_{12} data aleatoare a evenimentului E_{12}, avem

$$(\hat{}.,) = {}^{\circ 2}(*12)\,(ij.a) + *^2 \quad +\circledR^2 G_{4,B}) + *^2(\hat{}.11) + \hat{}^2(<n.io) + 4\text{-}\,c^2\,(iio.12)$$

sau

$$<J^2(Z_{12}) = 2{,}77 + 1{,}36 + 0{,}44 + 2{,}25 + 0{,}44 + 2{,}25 = 9{,}51.$$

La fel, data evenimentului E_{lo} este distribuită după legea Gauss-Laplace avînd valoarea medie 47,99 şi dispersia

$$<*10^{2\ 2\ 1} - <*1.3\ \text{“T}\ <*3.4^{2\ 1\ 2\ 1\ 2}\ \text{“T}\ <*4,8\ \text{“T}\ <*8.11^{1\ \ 2}\ i\text{“}\ <*\overline{11,10}^{17\ op} -$$

Trebuie să mai observăm că în exemplul nostru sînt prea puţine operaţii pentru a putea aplica cu toată rigoarea teorema limită centrală *). Data evenimentului E_{12} a fost calculată numai cu şase Operaţii critice. Dar grafurile programelor reale sînt, în general, mult mai importante şi calculul precedent se poate aplica practic.

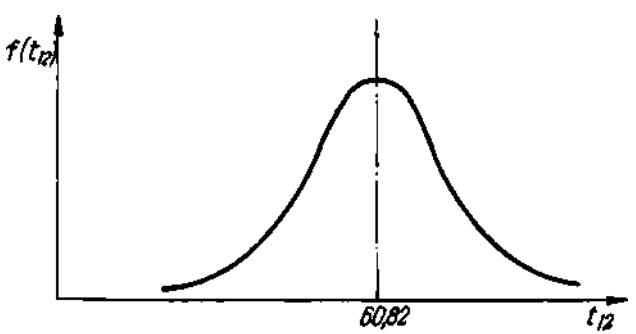


Fig. 2.44

Figura 2.44 arată repartiţia datei evenimentului E_{12}.

Am calculat astfel datele medii de realizare ale evenimentelor E_t şi cunoaştem repartiţiile lor. Ce se poate spune despre datele limită *t, ?*

Prin definiţie, data *t*| pentru evenimentul este data limită de începere a operaţiilor urmînd evenimentului E_t, dată a cărei depăşire provoacă întîrzierea întregului program. Timpul mediu necesar pentru realizarea operaţiilor situate între E_t şi $E_„$ se obţine căutînd pe graf drumul de valoare medie maximală de la *Ei* la E_n. Acest timp mediu este deci pur şi simplu valoarea drumului maximal de la E_t la E_n pe graful programului.

Dacă evenimentul *Ei* nu este prea aproape de sfîrşitul programului, se poate spune, ca mai înainte, că timpul mediu necesar pentru realizarea operaţiilor situate între E_t şi $E_„$ este distribuit după o lege normală a cărei dispersie este suma dispersiilor timpilor operatori ai operaţiilor compunînd drumul maximal de la *Ei* la E_n. Dacă evenimentul *Et* este vecin cu evenimentul final, nu se poate spune nimic referitor la repartiţia timpului mediu de mai înainte.

Să reluăm încă o dată graful din fig. 2.43 şi datele tabelului 2.8 şi să considerăm evenimentul E_6. Calculul timpului mediu necesar pentru realizarea operaţiilor situate între E_6 şi £$_{12}$ s-a făcut căutînd, prin metoda din 2.5, drumul de valoare maximală de la E_6 la E_{12}.

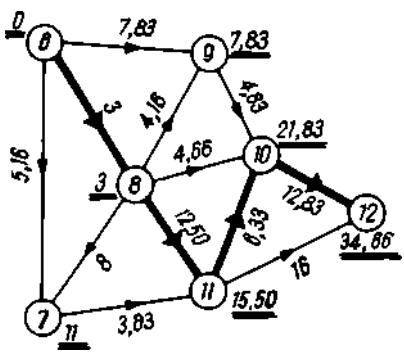


Fig. 2.45

Noi n-am reprezentat pe graful figurii 2.45 decît operaţiile posterioare lui E_e. Valoarea drumului maximal de la E_6 la E_{12} este 34,66. Acesta este şi timpul mediu necesar pentru realizarea operaţiilor posterioare lui E_6.

Dispersia distribuţiei acestui timp mediu este

°6.8 I ^8,11 "T" O_{n},10 I 010.12;

fie

$$0{,}11 + 2{,}25 + 0{,}44 + 2{,}25 = 5{,}05.$$

Forma repartiţiei presupuse normale (nu sînt decît patru variabile aleatoare, ceea ce n-ar fi suficient în toată rigoarea pentru aplicarea teoremei limită centrale) este aceea din fig. 2.46. Dar ştim că data terminării lucrărilor t_{12} are o valoare medie egală cu 60,82. Se poate lua atunci ca dată limită data 60,82 — 34,66 = 26,16. Această valoare se va lua în metoda PERT.

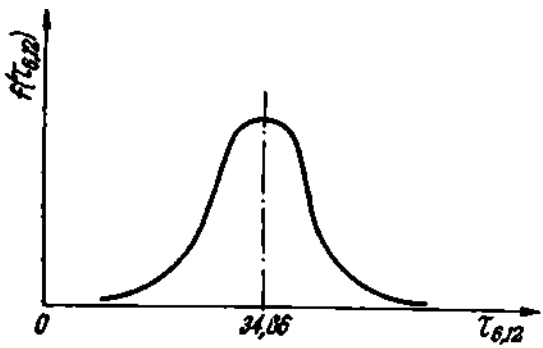


Fig. 2.46

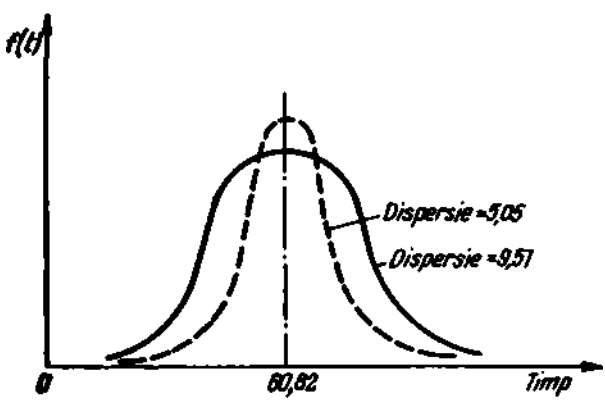


Fig. 2.47

S-a reprezentat în fig. 2.47, ceea ce se petrece în E_{12} dacă se face pornirea operaţiilor P_{69}, P_{68} şi $P_{6>7}$ la data 26,16. Această dată limită 26,16 ne convine, pentru că folosind-o nu

riscăm să perturbăm prea mult data de realizare a ansamblului lucrărilor. Bineînţeles, siguranţa ar fi mai mare luînd ca dată limită a lui E_e, de exemplu, valoarea 24 (fig. 2.48). Sîntem mai siguri atunci că data lui E_{12} va fi dictată de drumul critic iniţial: [1, 3, 4, 8, 11, 10, 12] (fig. 2.43), mai curînd decît de operaţiile drumului [6, 8, 11, 10, 12] (fig. 2.45). Orice ar fi, ne vom conforma metodei PERT şi vom lua ca dată limită a evenimentului E_s data 26,16. Astfel, în cazul general, data limită *ti* a unui eveniment se obţine scăzînd din data medie t_n a evenimentului final E_n timpul mediu necesar realizării operaţiilor posterioare lui $E_{(}$.

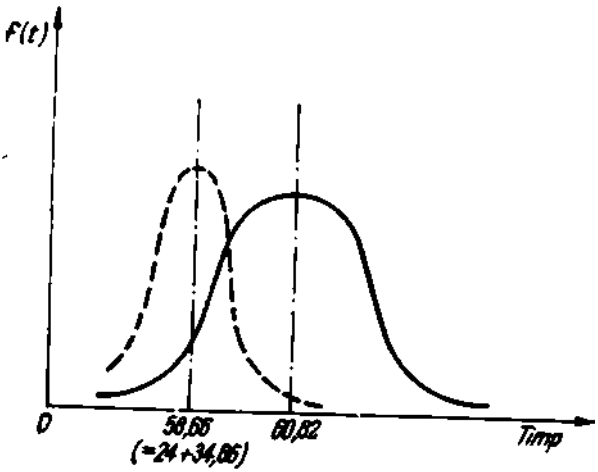


Fig. 2.48

Se procedează deci ca în 2.4, unde timpii operatori erau siguri, dar utilizînd de data aceasta timpii operatori medii (fig. 2.43) :

(2.44)

dacă $T_{j\ n}$ este timpul mediu necesar realizării operaţiilor posterioare lui *E(.*

în final, cunoaştem pentru fiecare eveniment data sa

medie de realizare t_t şi repartiţia corespunzătoare, la fel data sa limită Algoritmii folosiţi vor fi cei din 2.5, cu deosebirea că timpii operatori, care erau consideraţi determinaţi, sînt acum timpi operatori medii.

Vom defini un interval de fluctuaţie *mediu* (fig. 2.49)

t_{ij} (2-45)

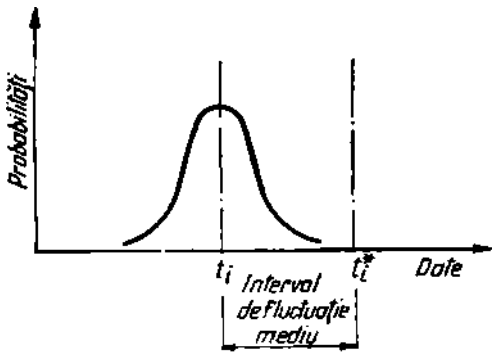


Fig. 2.49

pentru evenimentul *Ei* şi o margine liberă *medie* pentru operaţia :

$$h\text{ -}ti\text{- }ta. \qquad (2.46)$$

Trebuie să remarcăm că se desemnează tot prin *interval de fluctuaţie* cantitatea $ti - t_{ij}$ cînd aceasta nu conduce la confuzii.

2.8. EEALIZAEEA UNUI CALENDAE

Stabilirea unui calendar constă în fixarea datelor anumitor evenimente şi, în particular, a evenimentului final, corespunzător realizării programului. Evenimentele interesante de luat în consideraţie sînt acelea ale drumului critic, pentru că ele condiţionează imperativ realizarea programului. Cunoscînd distribuţia datei fiecărui eveniment de la sfîrşitul programului, este uşor de evaluat probabilitatea realizării sau a nerealizării acestor evenimente la data fixată în calendar, cu atît mai mult cu cît repartiţiile sînt, după cum s-a văzut înainte, normale sau

cvasinormale.

Să reluăm exemplul din fig. 2.43 şi să presupunem că este vorba de programul construcţiei unei vile şi că, din diverse motive, cum

părătorul vilei a fixat arhitectului sau antreprenorului data 63 pentru livrarea cheilor în mînă. Această clauză a fost adăugată la contract şi o depăşire a datei prevăzute generează pentru antreprenor o penalizare proporţională cu întîrzierea în livrare. Acesta, înainte de a modifica cîte ceva la programul său, va evalua riscul de depăşire a scadenţei. Dacă contractul prevede livrarea lucrărilor la data 63, se va evalua riscul unei întîrzieri în livrare :

J?$_{12}$ are o dată t_{12} repartizată după legea Gauss-Laplace cu valoarea medie 60,82 şi dispersia o?$_2$ = 9,51.

Variabila redusă

$$X = \frac{60,82}{\text{--------}}$$

ff12

şi se citeşte, pe tabelul funcţiei de repartiţie a legii normale urmează legea redus

normală

Pentru $t_{12} = 63$,

reduse, probabilitatea corespunzătoare : 0,75. Astfel, probabilitatea realizării înainte de data 63 este 0,75; există deci 75 de ocazii favorabile Iar 100 ca vila să fie realizată înainte sau la data 63. Probabilitatea nerea- lizării la data 63 este 1—0,75 = 0,25 ; există deci 25 ocazii favorabile la 100 pentru ca vila să nu fie realizată la data 63. Riscul de a fi penalizat este deci departe de a fi neglijabil pentru antreprenorul care a acceptat această dată de livrare ‡‡‡‡).

Dacă contractul prevede livrarea lucrărilor la data 64, probabilitatea nerealizării este 1 — 0,85 = 0,15.

Dacă contractul prevede livrarea lucrărilor la data 65, probabilitatea nerealizării este 1—0,91 = 0,09.

în sfîrşit, dacă data pusă în contract este 66, probabilitatea nerealizării la data prevăzută nu este mai mare decît 1 — 0,95 = = 0,05. Astfel riscul de a nu onora contracul nu este pentru antreprenor decît de 5%.

Aceste rezultate sînt foarte interesante pentru antreprenor:

— Dacă el are posibilitatea de a face să se accelereze lucrările, va examina, potrivit datei puse în contract, dacă este cazul de a face aceasta sau nu. Va ţine cont în această decizie de faptul că orice accelerare a lucrărilor antrenează în general o creştere a costului acestora.

— Dacă nu are posibilitatea de a face să se accelereze lucrările, îi va fi posibil atunci să vadă într-un mod precis dacă are interesul să accepte sau să refuze contractul ţinînd seama de data fixată şi de preţul fixat prin convenţie pentru penalizare.

---

‡‡‡‡ **Această expunere Işi datorează părţile ei esenţiale articolului [5] din bibliografie.**

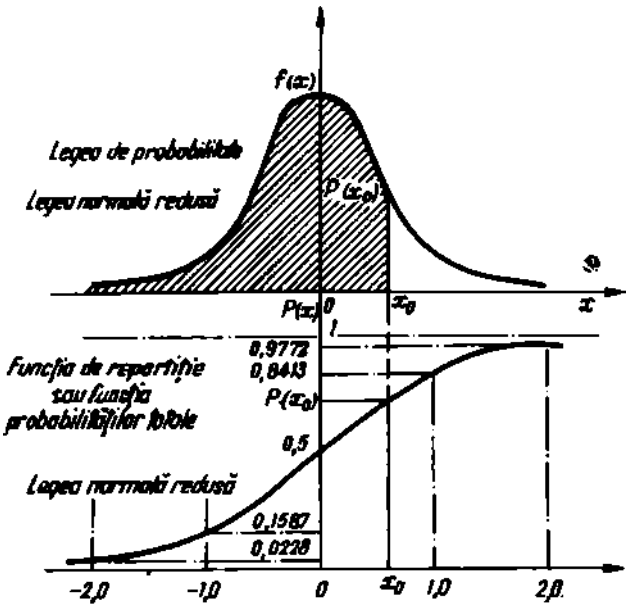


Fig. 2.50

Figura 2.50 dă aspectul legii de probabilitate şi a funcţiei de repartiţie a legii normale reduse.

2.9. UTILIZAREA UNUI CALCULATOR ELECTRONIC

Exemplele date în paragrafele precedente erau exemple foarte simple de programe care nu comportau decît un număr foarte mic de operaţii. în practică, programele de cercetare sau de dezvoltare, mai ales cînd analiza este foarte fină, comportă zeci şi uneori sute de operaţii. Se impune în acest caz folosirea unui calculator electronic.

Două aspecte merită a fi subliniate : evaluarea iniţială a unui program şi controlul unui program în curs de realizare.

2.9.1. EVALUAREA INIŢIALĂ A UNUI PROGRAM

Metoda expusă permite, după cum am văzut, pornind

de la un proiect de program, să obţinem indicaţiile următoare:

— data de realizare medie t_t şi data limită t^* ale diverselor evenimente ;

— intervalele medii de fluctuaţie ale evenimentelor şi marginile libere ale operaţiilor necritice;

—probabilitatea realizării unui calendar prestabilit şi aceasta pentru evenimentele de la sfîrşitul programului.

Dacă proiectul programului este satisfăcător, adică dacă probabilitatea de realizare a unui calendar prestabilit este suficient de mare, acest proiect este adoptat şi programul trece în execuţie. în caz contrar se poate pune problema remanierii lui şi pentru aceasta se va căuta prin simulare să se reducă timpii operatori ai operaţiilor critice, alocîndu-le de exemplu resurse suplimentare, poate în detrimentul operaţiilor cu margini libere importante.

în sfîrşit, cu sau fără schimbări, va putea fi stabilit un program coerent răspunzînd bine diverselor imperative.

2.9.2. CONTROLUL UNUI PROGRAM ÎN CURS DE REALIZARE

Pe măsura avansării programului datele reale înlocuiesc estima- ţiile mai mult sau mai puţin precise făcute înainte. Datele noi se introduc în calculator, ceea ce permite un control permanent al programului, precizînd evoluţia sa viitoare şi ţinînd cont de desfăşurarea sa reală. Astfel se poate, pentru respectarea termenelor impuse de un contract, să se modifice sau să se accelereze anumite operaţii. Responsabilul execuţiei programului are deci în mînă un instrument de previziune şi de control care îi permite să ia în timpul dorit, cînd este necesar, toate deciziile de corectare care se impun (fig. 2.51).

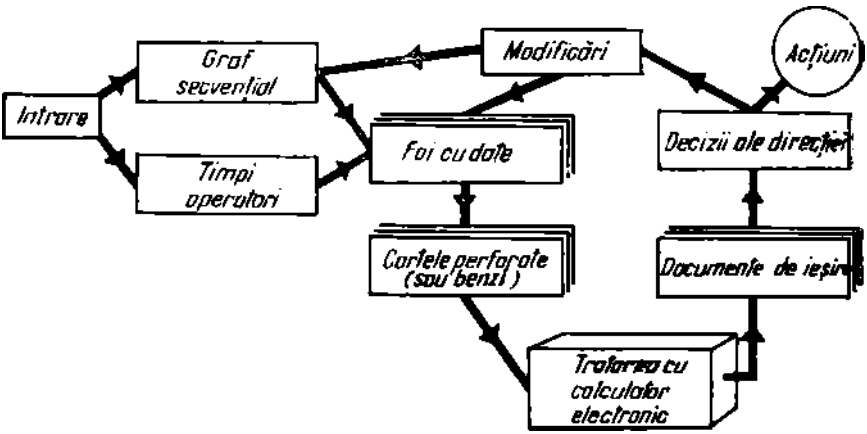


Fig. 2.51

Forma documentelor de intrare şi de ieşire poate fi foarte variată şi poate să se adapteze, eventual, la necesităţile particulare ale fiecărui tip de program. Luînd de o parte tabelul complet al estimărilor (tabelul 2.9), care va fi într-o oarecare măsură documentul de lucru de bază al metodei PERT, se poate examina producţia, automată a diverselor documente sau grafice :

— lista evenimentelor sau a operaţiilor critice,

— clasamentul evenimentelor sau al operaţiilor în funcţie de intervalul de fluctuaţie sau de marginea liberă;

— un grafic cu abaterile (în plus sau în minus) ale datelor evenimentelor calculate, în raport cu datele corespunzătoare fixate în registrul de scadenţă dorit sau calculat anterior;

— un grafic indicînd vizual progresul prevăzut al programului : datele de scadenţă calculate ale evenimentelor puse împreună cu intervalul de fluctuaţie corespunzător;

— graficul lui Gantt al operaţiilor programului indicînd în mod egal intervalele de fluctuaţie.

în sfîrşit, este important de subliniat că programul-maşină,. element central al metodei, este făcut o dată pentru totdeauna, permiţînd adaptările eventuale pentru informaţiile de ieşire (natura»

şi forma documentelor dorite, prezentarea etc.). În cazul în care programul studiat comportă un număr relativ restrîns de operaţii elementare, metoda poate fi aplicată cu rezultate bune fără ajutorul unui calculator, cel puţin pentru activitatea de evaluare iniţială a programului. Pentru funcţia *control al programului* din contră, tratamentul manual al datelor devine repede nepracticabil dacă se urmăreşte efectuarea controalelor frecvente şi rapide.

Tabelul 2.9

Evenimen t nr.	Data de realizare aşteptat!		Data limită de realizare		Interval de fluctuaţie mediu *h*	Scadenta iniţială	Probabili-tatea scadentei
	Medie	Dispersie	Medie	Dispersie			
50	**92**	**38**	**92**	**0**	**0**	**82**	**0,05**
51	**85**	**35**	**85**	**3**	**0**	**77**	**0,09**
54	**74**	**29**	**82**	**4**	**8**	**73**	**0,42**
52	**47**	**25**	**74**	**7**	**27**	**70**	**1,0**
53	**70**	**31**	**70**	**7**	**0**	**60**	**0,02**
57	**56**	**23**	**64**	**10**	**8**	**55**	**0,42**

***E₁* (punerea în execuţie a programului)**

Tabelul 2.9, „Informaţii de ieşire”, corespunde unei părţi a grafului din fig. 2.52.

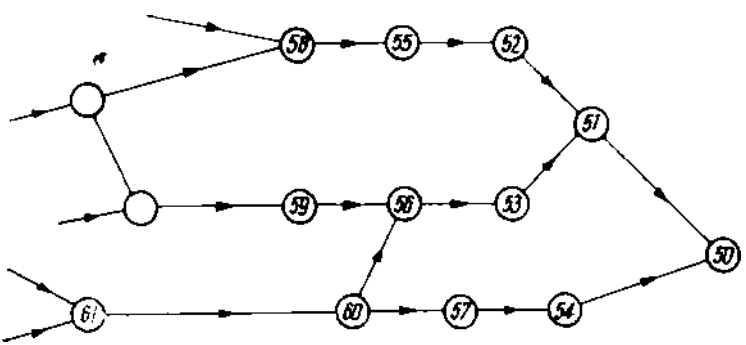


Fig. 2.52

în concluzie, meritul esenţial al metodei PERT şi al

variantelor sale constă în posibilitatea de a-ţi da seama, pe măsură ce se desfăşoară lucrările, de deplasarea urgenţelor şi de punctele unde trebuie făcut un efort deosebit. De fapt, drumul critic nu este întotdeauna acelaşi. El poate evolua în funcţie de fapte imprevizibile. Rămîne întotdeauna posibil să se examineze repercusiunile lor asupra datei probabile de terminare a lucrărilor, să se introducă sarcini noi (subtratate, de exemplu) şi să se evalueze incidenţa lor. în cîteva cuvinte, este vorba de un instrument îmbunătăţit şi perfecţionat permanent, care permite orientarea acţiunii la fiecare moment, gradînd eforturile.

GENERALIZAREA METODEI PERT

3.1. INTRODUCERE

în acest capitol se va prezenta o generalizare a metodei PERT. Modelul este acum un model stochastic, aplicîndu-se bine in special programelor de cercetare, pentru care nu este întotdeauna posibil să se stabilească un graf bine definit.

3.2. EVENIMENTE DECIZIONALE §§§§§)

în multe programe de cercetare sau de dezvoltare anumite evenimente au o semnificaţie deosebită, in sensul că de rezultatul lor depinde desfăşurarea ulterioară a programului. Altfel spus, nu se poate stabili un program, pentru că de rezultatul anumitor operaţii sau al anumitor evenimente depinde conducerea proiectului. Astfel de evenimente se vor numi *decizionale.* Se pot găsi mai multe dintre acestea în acelaşi program. Evenimentele decizionale intervin constant în programele de cercetare unde experienţele cerute depind de rezultatele anumitora dintre ele. Ele se întîlnesc de asemenea în programele de dezvoltare.

Un exemplu simplu va permite cititorului de a situa mai bine problema. Serviciul geologic al unei companii miniere, după o serie de măsurări geofizice pe teren, a localizat un zăcămînt important de plumb într-o regiune determinată din

---

§§§§§ **în 3.2 — 3.7 am utilizat in special lucrările lui Howard Eisner [18J.**

C^vennes. Inginerul geolog estimează tonajul zăcămintului la 2 000 000 tone şi conţinutul său mediu, după eşantioanele găsite şi rezultatele cîtorva sondaje efectuate, la 2,5% Pb. Direcţia Companiei este interesată de acest zăcămînt şi datorită optimismului geologului, decide crearea puţurilor de extracţie şi, eventual, a unei instalaţiii de spălare. Se stabileşte atunci un program de lucrări în care este prevăzută, evident, o ■campanie de sondaje sistematice. De rezultatele acestei campanii vor depinde operaţiile ulterioare ale programului. într-adevăr, importanţa şi alegerea instalaţiilor miniere vor fi diferite, după cum tonajul şi calitatea zăcămîntului răspund sau nu speranţelor ivite. Se va putea admite chiar că stabilirea unei instalaţii de spălare nu este necesară dacă importanţa zăcămîntului este prea mică; minereul va fi transportat atunci cu camioane şi pe calea ferată la uzina cea mai apropiată a companiei, care îşi va asuma sarcina tratării sale. Din acest exemplu se vede că nu există numai un program ■de lucrări, ci mai multe, alegerea unuia dintre ele depinzînd de rezultatele campaniei de sondaje. Rezultatul sondajelor este evenimentul •decizional, în acest exemplu.

Pentru simplificare, să presupunem că nu există decît trei eventualităţi referitoare la rezultatele campaniei de sondaje :

1) zăcămînt foarte important justificînd construcţia a trei puţuri (dintre care două de aerisire şi de coborîre a personalului şi unul de ■extracţie) şi stabilirea unei instalaţii de spălare;

2) zăcămînt de importanţă mijlocie care nu necesită decît două puţuri;

3) zăcămînt puţin important necesitînd numai două puţuri şi mijloace de exploatare reduse.

Operaţiile necesare punerii în exploatare sînt următoarele :

a) obţinerea permisului de exploatare ;

b) stabilirea unei piste de 6 km;

c) transportul şi instalarea la baza construcţiei a două sondeze;

d) crearea clădirilor provizorii pentru biroul de planuri şi locuinţa muncitorilor sondori;

e) gudronarea pistei;

/) aducerea apei;

g) campania de sondaje;

h,) săparea şi echiparea a trei puţuri; h_2) săparea şi echiparea a două puţuri;

ij) transportul şi instalarea la bază a materialului de exploatare tip 1;

12) transportul şi instalarea la bază a materialului de exploatare tip 2;

13) transportul şi instalarea la bază a materialului de exploatare tip 3;

h) construcţia birourilor şi a locuinţelor muncitorilor şi inginerilor ;

j_2) construcţia birourilor şi a locuinţelor muncitorilor şi inginerilor ;

j_3) construcţia birourilor şi a locuinţelor muncitorilor şi inginerilor ;

k) trasări şi amenajarea fondului;

l) construcţia unei instalaţii de spălare.

Obiectivul programului este punerea în exploatare a zăcămîn- tului. Traseurile invocate în operaţia *k* sînt traseuri strict necesare începerii exploatării. In sfîrşit, operaţia „Construcţia de locuinţe" pentru muncitori nu este de aceeaşi importanţă cu a reşedinţei miniere.

Vom reuni cele trei programe de lucrări diferite într-unul singur. Obţinem atunci graful *generalizat* sau graful *stochastie* din fig. 3.1.

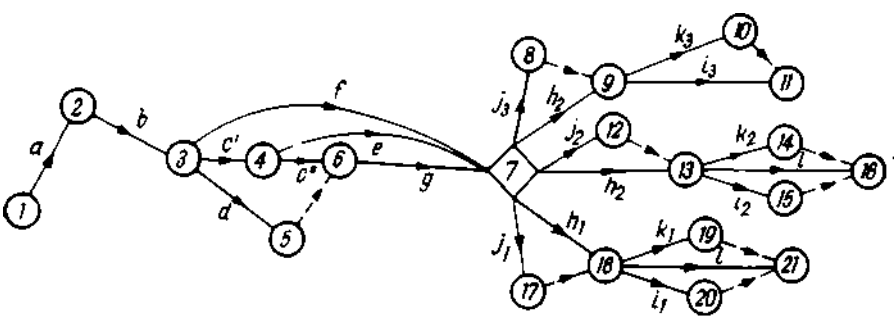


Fig. 3.1

Operaţia c a fost fracţionată în c' şi c", deoarece se presupune că nu se poate întreprinde gudronajul drumului înaintea trecerii son- dezelor. Operaţiile virtuale, punctate pe graf, au fost introduse res- pectînd regulile stabilite în capitolul 2. Evenimentul 7, care este eveniment decizional al acestui graf stochastie, este reprezentat printr-un romb.

Există pe acest graf trei evenimente terminale : E_w E_{ie} şi E_a. Este interesant acum să căutăm probabilităţile respective ale celor trei evenimente terminale. Dacă nu se predă nici o informaţie suplimentară, se poate admite arbitrar că probabilităţile lor respective vor fi 0,33. Dar inginerul geolog poate avea destule motive pentru

a crede că se găseşte foarte probabil în eventualitatea 1. I se va atribui atunci evenimentului E_n o probabilitate de 0,75, evenimentului $\hat{}_{18}$ probabilitatea 0,10 şi evenimentului E_u probabilitatea 0,15. Astfel, planificatorul va putea spune că există 75 cazuri favorabile din 100 de a se găsi în eventualitatea 1 şi de a avea o durată medie de lucrări corespunzînd evenimentului E_{21}.

Acest exemplu simplu, neavînd de altfel decît un raport îndepărtat cu problemele ridicate de punerea reală în exploatare a unui zăcămînt, a permis cititorului să înţeleagă în ce constă un eveniment decizional şi cum 6e poate el reprezenta pe un graf de program.

3.3. CÎTEVA PRECIZĂRI ASUPRA TERMINOLOGIEI FOLOSITE

Introducerea noţiunii de eveniment decizional permite luarea în consideraţie a alternativelor care se prezintă în desfăşurarea anumitor faze ale unui program, multe dintre activităţi fiind cercetări de existenţă şi căutînd să demonstreze că anumite relaţii există sau nu.

Două drumuri care pleacă dintr-un eveniment decizional se vor numai *conjunctive,* dacă trebuie efectuate amîndouă operaţiile pe care ele le reprezintă. Dacă trebuie realizată numai una sau alta dintrele ele, exclusiv, ele se vor numi *disjunctive* (fig. 3.2). Arcele sau drumurile 1 şi 2 sînt aici disjunctive.

Pnjgm
m

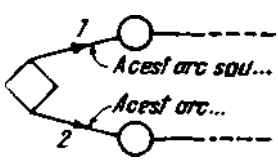


Fig. 3.2

Graful de tip PERT introdus în capitolul 2 poate fi

considerat ca un caz particular al grafului stochastic mai general, deoarece graful PERT nu conţine drumuri conjunctive.

Două configuraţii speciale ale grafului stochastic merită puţină atenţie. Acestea sînt:

— dependenţa între drumurile conjunctive;

— confluenţele drumurilor conjunctive.

1) Dependenţa între drumuri conjunctive are loc cînd alegerea unei operaţii de efectuat depinde de răspunsul unui eveniment decizional situat pe un drum conjunctiv. Acest caz este ilustrat de fig. 3.3. Drumurile 1 şi 2 sînt drumuri conjunctive care conduc la evenimentele decizionale *B* şi respectiv *C.*

Să presupunem acum, că dacă răspunsul lui *B* este negativ, operaţiile ulterioare depind de răspunsul lui *C.* Un mijloc de a reprezenta aceasta este repetarea pe graf a evenimentului decizional *C,* ceea ce s-a făcut (fig. 3.3) în Cj. Trebuie observat că (7 şi sînt identice şi că Cj trebuie să se situeze la aceeaşi dată cu *C,* sau după el.

2) A doua configuraţie specială a grafului stochastic este aceea a confluenţei de drumuri conjunctive. într-un vîrf al grafului ajung două sau mai multe drumuri conjunctive, după ce fiecare dintre ele a trecut printr-un eveniment decizional. Evenimentul *D* furnizează un astfel de exemplu (fig. 3.3). în acest exemplu, drumurile

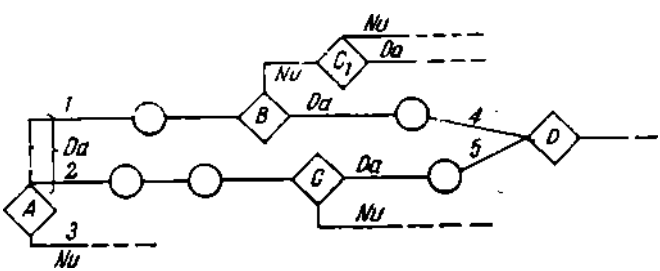


Fig. 3.3

4 şi 5 ajung la *D* şi pentru caD să fie atins este necesar ca răspunsurile lui *B* şi *C* să fie ambele afirmative.

3.4. ENUMERAREA EVENIMENTELOR TERMINALE POSIBILE

Deoarece graful stochastic permite reprezentarea alternativelor, este clar că nu toate evenimentele terminale sînt realizabile. Pot apărea anumite restricţii.

Dacă simbolul © reprezintă *operaţia sumă disjunctivă* şi simbolul n *operaţia intersecţie,* expresia următoare indică, sub formă logică, mulţimea evenimentelor terminale posibile ale programului

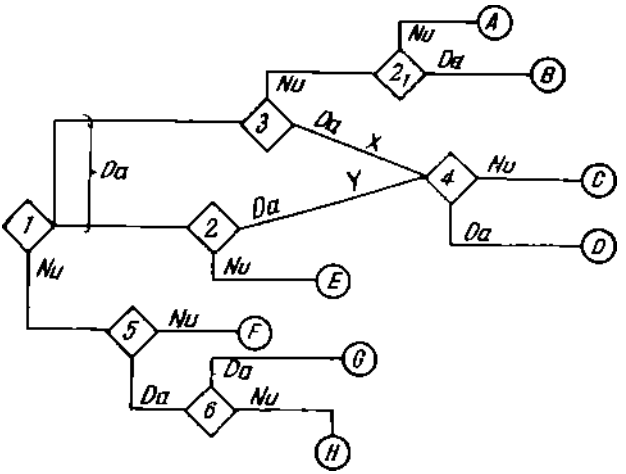


Fig. 3.4. Pe acest graf sint reprezentate numai evenimentele decizionale prin excluderea evenimentelor normale.

de cercetări din fig. 3.4. Evenimentele terminale posibile sînt: {[(A © *B)* © X] n *(Y © E)}* ® *{(G® H)@F}* (3-1)

sa u

Pornind de la $X \cap Y = C \circledR j).$ terminal expresia posibile : (3-2)

(3.1) obţinem evenimentele e

(A şi *y)*	*(X* şi *Y)* = *(C* sau *D)*	
(A şi *E)*	*(X* şi *E)*	
(B şi **T)**	*G*	(33
(B şi *E)*	*H*	)
	F	

Dependenţa dintre drumurile conjunctive reprezentate prin evenimentele decizionale 2 şi 2_r restrînge evenimentele finale posibile,

pe anumite dintre ele făcîndu-le imposibile. Observînd că *(X* şi T) este egal cu *(C* sau D), lista definitivă a evenimentelor terminale posibile este atunci:

A şi *E*
B şi I
C
D
X şi *E* (3.4
G

Acum, după ce toate evenimentele posibile au fost enumerate, se va căuta clasamentul acestora în termeni de probabilităţi de realizare.

3.5. PROBABILITATEA EVENIMENTELOR TERMINALE

Probabilităţi apriori sînt acum afectate fiecăreia din alternativele evenimentelor decizionale. Este ceea ce am făcut în exemplul din 3.2, atribuind eventualităţii 1 probabilitatea apriorică 0,75 şi eventualităţilor 2 şi 3 probabilităţile 0,10 şi respectiv 0,15. în legătură cu aceasta, trebuie remarcat că un eveniment decizional poate conduce la mai multe eventualităţi, trei în exemplul din 3.2, dar că este întotdeauna posibil să se introducă în graf numai evenimente decizionale cu două eventualităţi, ca în fig. 3.4.

Graful din fig. 3.4 devine astfel acela din fig. 3.5 :

Eveniment final	Probabilitatea
D	0,2058
X şi E	0,1960
F	0,15
B şi Y	0,126
H	0,09
C	0,0882
A şi *E*	0,084

Entropia *H* = 2,88

***Bţnox* = 3**

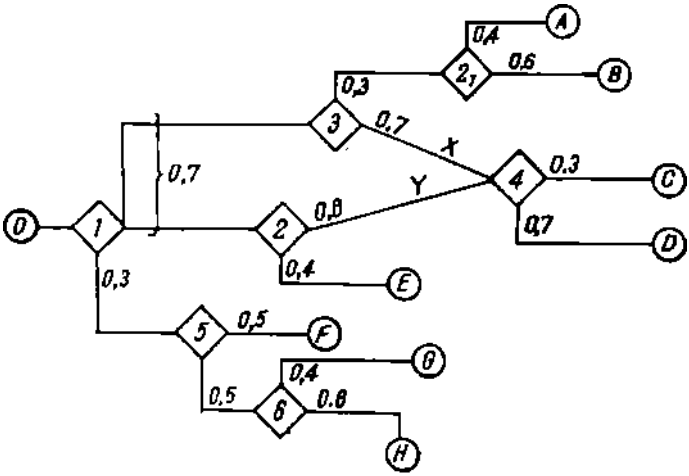


Fig. 3.5

După cum s-a indicat mai înainte, graful de tip PERT apare ca un caz particular al grafului stochastic în care unui drum disjunctiv sau unei mulţimi de drumuri conjunctive, pentru fiecare eveniment decizional, îi este afectată o probabilitate egală cu 1.

Probabilităţile evenimentelor terminale ale grafului din fig. 3.5 pot fi calculate acum cu ajutorul probabilităţilor apriorice ale rezultatelor evenimentelor decizionale (tabelul 3.1).

Tabelul 3.1

Evenimente finale	**Prob&bllitâţl compuse**	**Probabilişti ala evenimente-lor terminale**
A* şi *E	**p(A)-p(B/A) = (0,4) (0,3) (0,7) (1)**	**= 0,084**
B şi Y	**p(B)-p(Y/B) = (0,6) (0,3) (0,7) (1)**	**= 0,126**
C	**p(C)-p(X)-p(Y) = (0,3) (0,7) (0,7)**	**= 0,0882**
D	**p(D)p(X)p(Y)= (0,7) (0,7) (0,7)**	**= 0,2058**
X sl E	**p(X) -*p(EIX)* = (0,7) (0,7) (0,4)**	**= 0,196**
G	**p(G) = (0,4) (0,5) 0,3)**	**= 0,06**
H	**p(H) = (0,6) (0,5) (0,3)**	**= 0,09**

F	**p(F)**	**= (0,5) (0,3)**	**= 0,15**

3.6. FUNCŢIA ENTROPIE

Clasamentul evenimentelor terminale posibile în funcţie de probabilităţile lor de realizare este un rezultat foarte util. în exemplul dat, evenimentul *D* are cea mai mare probabilitate şi evenimentul (Z şi *E)* se plasează al doilea. Evenimentul cel mai puţin probabil este evenimentul *G.* O utilizare mai bună a acestor probabilităţi poate fi făcută folosindu-le comparativ, decît încercînd să judecăm un eveniment terminal pe baza probabilităţii sale absolute, deoarece probabilităţile evenimentelor terminale descresc, în general, în timp ce lungimea grafului şi numărul de evenimente decizionale cresc, în legătură cu aceasta, se poate folosi *funcţia entropie,* bine cunoscută în fizică sau în teoria informaţiei, care dă o măsură cantitativă a gradului în care anumite evenimente terminale sînt mai favorabile, din punct de vedere probabilistic, decît altele. Această funcţie este definită prin relaţia

$$H = -\sum_{i=1} p_i \log_2 p_i, \qquad (3-$$

unde *H* este entropia, p_t — probabilitatea apriorică a evenimentului terminal de ordinul *i* şi *N* — numărul evenimentelor terminale.

De exemplu, într-o situaţie de alegere dichotomică cu probabilităţi apriorice cu 1/2, *H* este egală cu 1, dacă se ia logaritmul în baza 2. Dacă probabilităţile sînt 1 şi 0, *H* este egală cu 0. Funcţia entropie are o valoare maximală egală cu $\log_2 N$, dacă toate probabilităţile apriorice sînt egale între ele.

Ca măsură a incertitudinii relative într-un sistem, expresia *entropie relativă* a fost definită astfel:

$$H / H \qquad (3\text{-}6)$$

Acest concept poate fi utilizat ca o măsură a gradului în care anumite evenimente terminale sînt mai probabile decît altele.

în graful din fig. 3.5 avem :

$$= \log_2 8 = 3,$$

$$H = -\sum Pi \log_2 Pi = 2,88,$$

$$E = \frac{H}{3} = 0,96.$$

3.7. METODA PERT GENERALIZATĂ

Prin introducerea evenimentelor decizionale şi prin afectarea de probabilităţi apriorice rezultatelor fiecăruia dintre aceste evenimente, a putut fi elaborată o generalizare a metodei PERT, utilă în special în programele de cercetări. Probabilităţile apriorice afectate evenimentelor decizionale pot fi obiective sau subiective. în acest ultim caz, ele traduc presupunerile sau intuiţiile specialiştilor consultaţi.

Să reluăm exemplul din fig. 3.5, unde timpii operatori medii sînt daţi de tabelul 3.2. Figura 3.6 dă o reprezentare a grafului, ţinînd

Tabelul 3.2

Operaţia	Timpul operator mediu	Operaţia	Timpul operator mediu
^0>l	4	*P 2.B*	9
■^1.3	4	*P_t.C*	5
^1.2	11 [1]		9
^*3.2,	0	*P1.S*	12
	6	*p_s.r*	3
p 2,B	13	*P&>6*	7
$p_{3.t}$	8	*P* 6,G	9
■^2-4	6		10

seama de scara timpului. Pot fi obţinute informaţii cum sînt drumul critic, probabilităţile de realizare ale anumitor date ale unui calendar stabilit în prealabil (ponderate prin probabilităţile de a lua anumite drumuri) etc., urmărindu-se

preocupările privind fiecare proiect particular. Cunoaşterea probabilităţilor evenimentelor terminale împreună cu cele ale datelor medii de realizare procură indicaţii asupra desfăşurării viitoare a proiectului. Astfel, evenimentul final *D* este cel mai probabil şi drumurile conducînd la el sînt

0-l -3-4 şi 0-1-2-4.

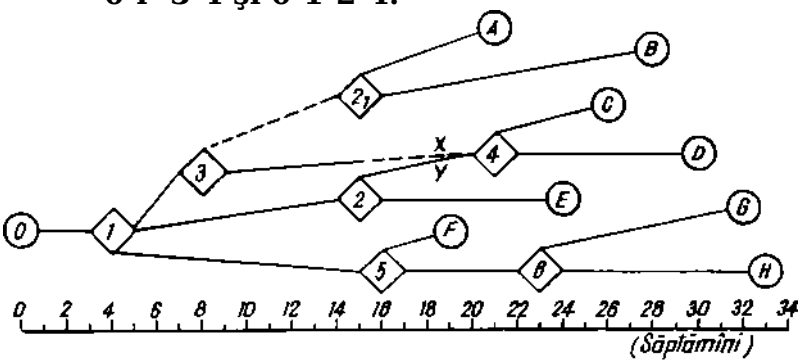


Fig. 3.6

Timpul său de realizare este de 30 săptămîni. De asemenea evenimentul *(X* şi *E)* are ca probabilitate de realizare 0,196 şi obiectivul *E* va fi atins la o dată medie 24. Trebuie observat că, o dată cunoscut rezultatul evenimentului 2 şi dacă el este astfel incit să conducă la *E,* operaţia P_{3i} conducînd la *X* poate fi întreruptă, deoarece pentru atingerea evenimentului 4 este necesar ca ambele operaţii *X* şi *Y* să fie efectuate.

Să observăm, în sfîrşit, că evenimentul 2, este obligat să se plaseze la aceeaşi dată cu evenimentul 2 sau după el.

Entropia relativă poate fi utilizată ca o măsură, sub forma unui număr unic, după gradul căruia anumite evenimente terminale sînt mai probabile decît altele. O entropie relativă egală cu 1 va sugera că toate evenimentele terminale au aceeaşi probabilitate (sînt echi- probabile), iar o entropie relativă egală cu zero va indica degenerarea grafului într-un graf de tip PERT, unde un eveniment final este absolut sigur de a fi realizat şi toate celelalte nu pot

avea loc.

în concluzie, informaţiile, obţinute prin metoda PERT generalizată, permite planificatorului sau organizatorului să compare alternativele unui program pe baza a trei caracteristici: şansele lor relative de realizare, operaţiile care conduc la realizare şi datele lor medii respective. Această metodă se aplică în special programelor de cercetări, dar se aplică la fel de bine şi anumitor programe de dezvoltare.

OPTIMIZAREA FUNCŢIEI ECONOMICE A COSTURILOR

4.1. INTRODUCERE

în capitolul *2* au fost obţinute diferite informaţii foarte interesante cu ajutorul metodei PERT. Stabilirea drumului critic sau a drumurilor critice a permis localizarea operaţiilor-cheie care comandă desfăşurarea unui program şi, în particular, data sa medie de realizare. Calculul intervalelor de fluctuaţie şi al marginilor libere operatoare a pus în evidenţă elasticitatea evenimentelor sau a operaţiilor necritice şi latitudinea pe care o putem avea în punerea lor în execuţie. Aceste aspecte diferite se regăsesc în faza „control al programului în curs de execuţie". Atenţia planificatorului poate fi atrasă de noi operaţii critice neprevăzute în programul iniţial. El ştie atunci în ce direcţie trebuie să-şi îndrepte efortul, pentru a respecta calendarul impus.

în general, timpii operatori, fie că sînt determinaţi sau sînt aleatori, variază în funcţie de costul operaţiei. Accelerarea unei sarcini se traduce în general printr-o creştere a costului său.

Vrem să luăm acum în consideraţie acest aspect şi obiectul acestui capitol este de a arăta cum este posibil, în anumite condiţii, de a optimiza un program.

4.2. UNELE CONSIDERAŢII GENERALE

Fiecare timp operator t_{if} poate varia între două limite d_u şi Z>„, impuse de consideraţii tehnice sau economice. Timpul operator corespunde duratei normale a operaţiei : este durata corespunzătoare costului minimal. Timpul operator d_u corespunde, din contră, duratei operaţiei, cînd aceasta este accelerată la maximum, iar preţul corespunzător este maximal.

Notînd cu p_v costul operaţiei P_{fj} pentru o durată t_{ijf} putem admite că $= f$ este o curbă de un tip analog celei desenate în fig. 4.1. Costul creşte dacă t_{if} descreşte pînă ind_w, dincolo de care nu se mai poate efectua lucrul.

Pare destul de verosimil ca întîi costul să treacă printr-un minim foarte plat, apoi să crească pentru condiţii anormale de lucru corespunzătoare la mijloace insuficiente, în ceea ce priveşte mîna de lucru sau materialul.

Dacă se ia ca timp operator al fiecărei operaţii a programului durata normală $Z>_o$, durata de execuţie totală a programului va fi durata normală : programul stabilit va fi un program *normal.* Din contră, dacă se accelerează la maximum fiecare operaţie şi dacă pentru fiecare dintre ele se ia ca timp operator d_{tj}, programul obţinut va fi programul numit *accelerat* al ansamblului de lucrări de realizat.

Trebuie să observăm că ne aflăm aici în situaţia în care timpii operatori au valori determinate şi nealeatoare; altfel spus, pentru un cost dat, durata unei operaţii este bine determină şi aceasta, pentru fiecare operaţie, se poate determina printr-o curbă de tipul celei din fig. 4.1.

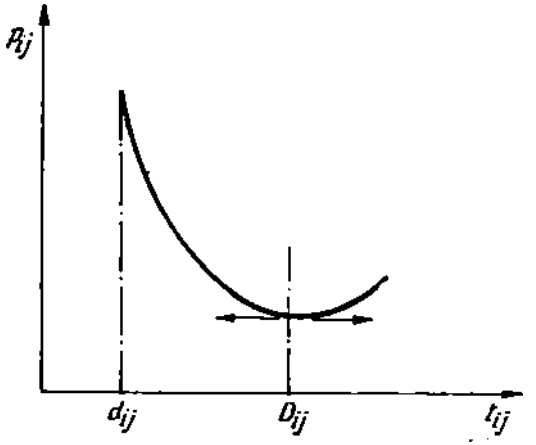


Fig. 4.1

Vom pune acum în evidenţă două aspecte interesante de optimizare a unui program, pornind de la informaţiile date de metoda drumului critic.

4.3. DIMINUAREA COSTULUI TOTAL AL UNUI PROGRAM

în acest paragraf nu este vorba de căutarea optimului unui program, ci numai de a arăta cum permit informaţiile date de metoda PERT să i se diminueze costul total, acţionînd asupra operaţiilor necritice.

Să considerăm deci, pentru un ansamblu de lucrări, un program oarecare, unde timpii operatori au fost totuşi aleşi

(4-

astfel încît

Calculul drumului critic dă durata de execuţie a programului. Costul total al programului astfel stabilit este suma costurilor tuturor operaţiilor:

$$p = \sum_{(i,j)\in U} p_{ij} \qquad (4\text{-}2)$$

unde $p_{iS} = 0$ dacă (i, *j)* e U (U reprezentând mulţimea arcelor care constituie graful programului).

Pentru a diminua costul total al programului, *durata de execuţie rămînînd aceeaşi,* vor trebui micşorate marginile libere ale operaţiilor necritice în limitele impuse de restricţiile 4.1. într-adevăr, a diminua marginea liberă a unei operaţii înseamnă a mări timpul său operator, deci a diminua costul. Făcînd aceasta s-ar putea întâmpla să se creeze noi drumuri critice. Acesta va fi cazul cînd s-ar putea anula toate marginile libere ale operaţiilor care constituie un drum pornind de la la E_n.

Vom preciza toate acestea reluînd exemplul din 2.3.Timpii operatori t_{if} sînt acum susceptibili să varieze între D_{iS} şi d_{tj}, mijlocind o creştere a costului fiecărei sarcini. Valorile timpilor D_{tj} şi d_{ij} sînt date în tabelul 4.1. Vom presupune că *creşterea costurilor este proporţională cu*

scăderea timpilor operatori. Aceasta duce la presupunerea că se reduc curbele de tipul celei din fig. 4.1, pentru fiecare operaţie, la segmente de dreaptă. Coeficienţii de proporţionalitate $c<j$ sînt daţi în tabelul 4.1; acestea sînt costurile marginale ale fie-

Tabelul 4.1

			‘u	Marginea liberi	Py (tn F)	*eii*
Pм	7	10	8	0	6 000	100
^1*3	12	15	13	0	20 000	1 200
Pl-4	7	10	9	11	2 000	200
	3	6	4	1	8 000	300
P 2.5	8	13	9	0	1 000	600
p..e	5	7	6	9	4 000	150
?3.4	7	9	7	0	3 000	200
^3.8	9	12	10	0	2 000	100
•P 3.8	5	8	6	10	4 000	200
■^3.®	9	10	9	11	25 000	150
^4.7	8	11	10	7	8 000	250
Pi.»	7	12	9	0	3 000’	600
P4.11	6	8	6	16	4 000	150
■^6.®	3	4	3	13	10 000	450
^6.7	4	7	5	9	2 000	150
? 6.8	2	7	3	3	3 000	300
Pe..	7	8	8	2	12 000	800
P7.11	3	6	4	1	3 000	150
^*8.7	6	9	8	0	10 000	200
^8.®	4	5	4	0	8 000	400
Pe.10	4	6	5	14	2 000	300
Pg.ii	11	15	13	0	7 000	1 000
P..10	4	6	5	10	3 000	400
Pio.ia	10	14	13	0	6 000	900
P11.10	5	8	6	0	2 000	300
Pii.ia	15	18	17	2	2 000	500

cărei operaţii. De asemenea, am făcut să figureze timpii operatori t_{ij} corespunzători programului neameliorat, marginile libere şi costurile p_{iS} ale fiecărei operaţii. Programul original este cel din fig. 4.2. Numerele dintre paranteze reprezintă marginile libere ale operaţiilor.

Durata de realizare a unui astfel de proiect este de 61 săptămîni şi costul său total, obţinut din suma costurilor operatorii aşezate în coloana 6 a tabelului 4.1. este de 160 000 F.

Ameliorare imediată care se impune mai întîi este mărirea timpilor operatori ai operaţiilor necritice şi aceasta, ţinîndu-se cont pentru fiecare operaţie, de valoarea D_{i5} şi de marginea liberă corespunzătoare.

Astfel marginea liberă a lui $Pi,_2$ fiind 0, timpul său operator nu se poate prelungi. La fel pentru $Pi,_3$. Din contră, marginea liberă a lui P_{14} fiind 11, durata sa se poate lungi, ea va deveni 10 săptămîni. $P_{2,3}$ are o margine liberă 1 şi $Z>_{23}$ = 6, durata lui $P_{2|3}$ va putea fi lungită şi va fi de 5 săptămîni. P_{215} avînd o margine liberă nulă, nu poate fi lungită. $P_{2,6}$ avînd o margine liberă 9 şi $Z>_{2\&}$ fiind egală cu 7, durata sa va putea fi lungită şi va fi de 7 săptămîni etc.

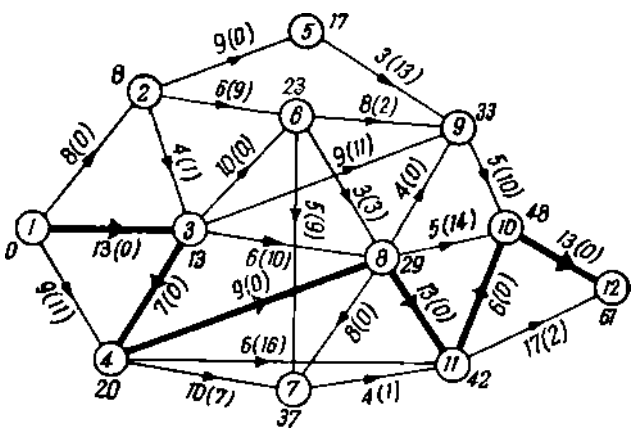


Fig. 4.2

Noii timpi operatori ai operaţiilor necritice vor fi

$t'^{l.2}$ = 8		«4.7 = 11		«8.10 = 6	
«i.3 = 13		«4.8 = 9		«8.11 = 1	
«l', = 10		«4.1 = 8		^9.10 = 6	
4	1				
«2, = 5		«5.0 — 4		«10.1 = 1	
3			2		
«2, = 9		««.7 = 7		«11.1 = 6	
5			0		
«2, = 7		«6.8 =6		«11.1 = 1	
6			2		
«3. = 7		«8.9 = 8			
4					
«3. = 10		«7.1 = 5			
6	1				
«3. = 8		«8.7 = 8			
8					
«3. = 10		«8.9 = 4			
9					

Aceşti noi timpi operatori sînt sublimaţi.

Graful noului program va fi cel din fig. 4.3. Anumite margini libere sînt anulate şi au apărut astfel noi drumuri critice. Drumurile critice sînt:

[1, *2,* 3, 6, 8, 11, 10, 12 |
[1, 3, 6, 8, 11, 10, 12]
[1, 2, 3, 4, 8, 11, 10, 12]
[1, 3, 4, 8, 11, 10, 12]
[1, 2, 3, 6, 8, 7, 11, 10, 12]
[1, 3, 6, 8, 7, 11, 10, 121
[1, 2, 3, 4, 8, 7, 11, 10, 12]
[1, 3, 4, 8, 7, 11, 10, 12],

Noile margini din fig. 4.3. sînt puse în paranteze.

Economia asupra fiecărei operaţii s-a obţinut făcîndu-se produsul lui c_o cu creşterea duratei operatorii. Economia realizată asupra lui P_{1A} este egală cu 200; asupra lui $P_{2>3}$ este 300; asupra lui $P_{2\,6}$ este 150 ; asupra lu i $P_{3\,8}$ este 200 x 2 = 400; asupra lui P_{3i} este 150; asupra lui $P_{4>7}$ este 250; asupra lui P_{iM} este 150 x 2 = 300 ; asupra lui $P_{s\,9}$ este 400; asupra lui $P_{6>7}$ este 150 x 2 = 300 ; asupra lui $P_{8\,8}$ este egală cu 300 x 3 = 900; asupra lui $P_{7\,u}$ este 150 ; asupra lui $P_{8\text{-}10}$

este 300; asupra lui P_{910} este 400 ; asupra lui $P_{u,12}$ este 500.

Economia totală este suma economiilor realizate asupra fiecărei operaţii, adică 4700 F şi costul total al noului program din fig. 4.3 este

$$160\,000 - 4700 = 155\,300 \quad \text{F.}$$

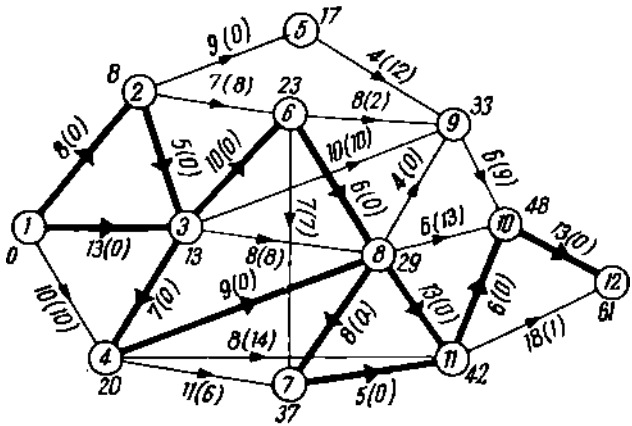


Fig. 4.3

Nu trebuie însă să credem că s-a atins optimul pentru o durată de realizare de 61 săptămîni. Consideraţiile precedente au căutat să arate pur şi simplu cum informaţiile date de metoda PERT permit ameliorarea unui program, prelungind operaţiile necritice atît cît este posibil.

4.4. ACCELERAREA UNUI PROGRAM LA CEL MAI MIC COST******)

Pentru a diminua timpul de execuţie total al unui program, trebuie diminuată durata unei operaţii critice. Durata de execuţie totală va fi de asemenea redusă. Dacă

****** **Exemplul datorat lui F. Ochoa, inginer civil (Univ. din Mexico).**

alegem operaţia critică care *pentru o aceeaşi diminuare a timpului* propune *cea mai mică creştere a costului,* vom accelera programul cu cele mai mici cheltuieli. Şi aici, metoda folosită va fi intuitivă şi destul de banală. Obiectul acestui paragraf este, ca şi al paragrafului 4.3, să arate importanţa economică a rezultatelor metodei PERT : drum critic şi margini libere.

Să presupunem, de exemplu, că avem de construit şi echipat un ansamblu hidroelectric. Să luăm ca unitate de timp luna.

Operaţiile de realizat sînt:

a) construcţia drumurilor de acces la uzină şi la carierele de exploatat pentru obţinerea materialelor (durata probabilă $t_a = 4$);

b) pregătirea carierelor de exploatare şi a fundaţiilor = 6);

c) construcţia unui centru pentru administraţie şi personal, în general ($t_e = 4$);

d) comanda materialului electric şi hidraulic (generatoare, turbine, conductă forţată etc.) ($t_d = 12$);

e) construcţia uzinei ($t_e = 10$);

/) construcţia barajului, a digurilor şi a deversorului de suprafaţă ($t_f = 24$);

g) construcţia galeriilor şi conductelor de aducţiune ($i_s = 7$);

h) montajul uzinei şi al conductelor ($t_A = 10$);

t) încercarea funcţionării ($t_{\text{ţ}} == 3$).

Graful acestui program este cel din fig. 4.4. Evenimentele sau etapele sînt:

1) pornirea lucrărilor;
2) terminarea drumurilor de acces;
3) terminafrea centrului şi a fundaţiilor;
4) terminarea uzinei şi a conductelor de aducţiune ;
5) terminarea ansamblului energetic;
6) livrarea lucrărilor.

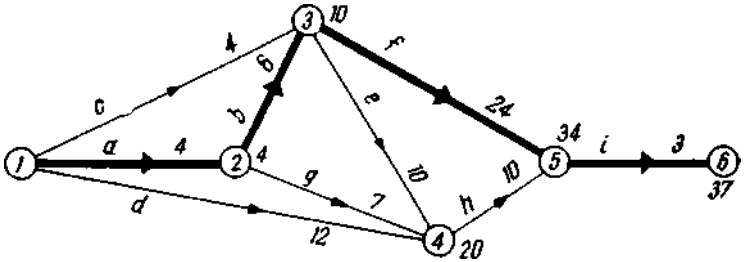


Fig. 4.4

Am presupus că programul iniţial normal stabilit se ridică la 350 milioane F repartizaţi după cum se indică în tabelul 4.2. Pe acest tabel sînt indicate de asemenea duratele şi costurile corespunzătoare programului accelerat, unde toate operaţiile sînt reduse la minimul compatibil cu cerinţele tehnice.

Tabelul 4.2

Barclna	Program normal		Progra m aocelerat		Costul acce-lerării pe lună
	Durata probabilă (luni)	Cost probabil (milioane F)	Durata probabilă	Coet probabil	
a	**4**	**5**	**2**	**15**	**5**
b	**6**	**11**	**5**	**30**	**19**
c	**4**	**3**	**2**	**11**	**4**
d	**12**	**150**	**9**	**180**	**10**
e	**10**	**10**	**8**	**20**	**5**
f	**24**	**147**	**19**	**212**	**13**
9	**7**	**18**	**6**	**30**	**12**
h	**10**	**4**	**7**	**25**	**7**
i	**3**	**2**	**2**	**5**	**3**
		350		**528**	

Dacă vrem să reducem durata totală a execuţiei la 9 luni, trebuie să atacăm mai întîi sarcinile critice, adică sarcinile *a, b, f* şi *i.*

în mod precis, reducerea cu o lună a lui *i* va fi mai puţin scumpă (3 milioane), deoarece reducerea sarcinilor *a, b* şi *f* costă 5, 19 şi respectiv 13 milioane F. Deci, vom urma această cale (fig. 4.5). Nu este necesar să accelerăm sarcinile necritice; s-ar cheltui bani în

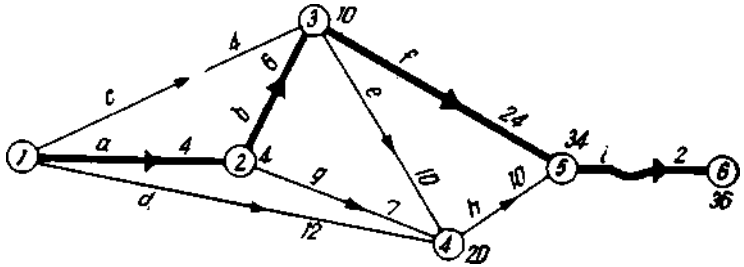


Fig. 4.5

pierdere; autorii americani o numesc eroare de alegere „To buy floating time". *)

Să mergem mai departe şi să încercăm să cîştigăm o lună în plus, în acest caz, reducerea cu o lună a lui *a* ne va da costul cel mai mic, deoarece după cum se vede în tabelul 4.2, nu se poate continua cu reducerea lui *i.*

Se va continua în acelaşi mod accelerînd sarcina *a,* apoi sarcina / după cum se poate vedea în tabelul 4.3. Reducerea sarcinii *f* de la 21 la 20 luni va face să apară două noi sarcini critice, anume : *e* să fie P_{34} şi *h* să fie P_{4S} (fig. 4.6). în sfîrşit, dacă vrem să cîş

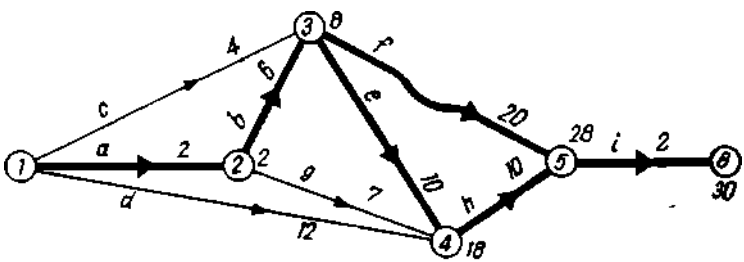


Fig. 4.6

tigăm încă o lună, adică să reducem durata totală de la 30 la 29 luni, putem realiza aceasta prin una din următoarele căi:

a cîştiga	(1 lună asupra lui *f*: cost.....13 asupra lui *e* : coBt.....__5	
k	Total:	18

a cîştiga { 1 lună asupra lui *b* : cost.....**19**

Total: **19**

Se vede că este avantajos să cîştigăm timp asupra lui / şi *e.* Trebuie deci 18 milioane în plus faţă de situaţia de mai înainte pentru a cîştiga încă o lună.

în definitiv, alegerea va putea fi exercitată asupra programelor următoare (vezi tabelul 4.3).

') A cumpăra timp pierdut (N.T.).

Tabelul 4.3

Durata programului	Costul (mllloa* ne F)	Durata operaţiilor (luni)								
		a	*b*	c |	*d*	' I	*f*	0	*h*	
37 luni	**35 0**	**4**	**6**	**4**	**12**	**10**	**24**	**7**	**10**	**3**
36 -	**35**	**4**	**6**	**4**	**12**	**10**	**24**	**7**	**10**	**2**
35 -	**35**	**3**	**6**	**4**	**12**	**10**	**24**	**7**	**10**	**2**
34 -	**36**	**2**	**6**	**4**	**12**	**10**	**24**	**7**	**10**	**2**
33 -	**37**	**2**	**6**	**4**	**12**	**10**	**23**	**7**	**10**	**2**
32 -	**38**	**2**	**6**	**4**	**12**	**10**	**22**	**7**	**10**	**2**
31 -	**40**	**2**	**6**	**4**	**12**	**10**	**21**	**7**	**10**	**2**
30 -	**41**	**2**	**6**	**4**	**12**	**10**	**20**	**7**	**10**	**2**
29 -	**43**	**2**	**6**	**4**	**12**	**9**	**19**	**7**	**10**	**2**
28 -	**45**	**2**	**5**	**4**	**12**	**9**	**19**	**7**	**10**	**2**

4.5. VARIAŢIA ARBITRARĂ A COSTULUI OPERATOR ÎN FUNCŢIE DE(DURATĂ

Este cazul foarte general cînd fiecărei operaţii i se poate asocia o curbă de cost în funcţie de durată, de tipul celei din fig. 4.1 Fiecare timp operator variază între două limite : *durata normală* D_{if} corespunzătoare costului minim şi *durata accelerată* $d_{\{\}}$.

Dacă într-un program se ia pentru fiecare operaţie durata sa normală, corespunzătoare costului minimal D_{tj}, se obţine un program normal al cărui cost total este el însuşi minimal. Durata sa este D_n dacă n este indicele

evenimentului final .

Dacă se ia pentru fiecare operaţie durata sa accelerată d_{ijv} se obţine un program accelerat. Acesta nu este în general un program optimal, adică cu cost minimal, căci i se poate reduce costul prelungind operaţiile necritice, cum s-a indicat în 4.3. Din contră, durata sa de execuţie este minimală. O vom numi d_n dacă E_n este evenimentul final.

Pentru valorile situate între d_n şi D_n există o infinitate de soluţii posibile. Dacă reprezentăm variaţia costului total p în funcţie de durata de execuţie totală a ansamblului lucrărilor, obţinem o figură $OABC$ care include toate soluţiile posibile, OA fiind locul soluţiilor optimale (fig. 4.7). în cazul general, cînd curbele : costul în funcţie de durată sînt oarecare, metodele de cercetare operaţională, în stadiul cunoştinţelor actuale, nu par să fie capabile să determine curba OA, locul soluţiilor optimale.

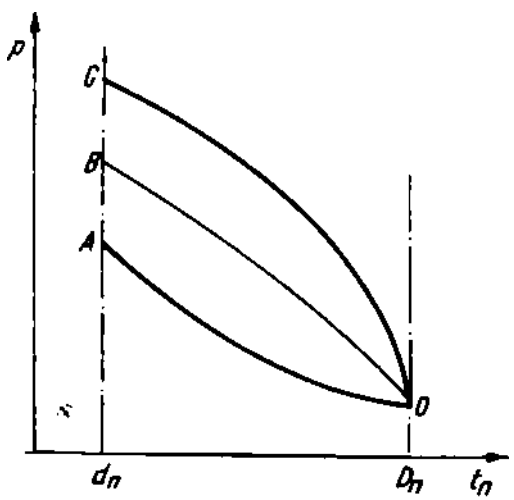


Fig 4.7

Totuşi, metoda indicată în 4.3 permite determinarea punctului A. Pornind de la un program unde toţi timpii operatori sînt putem reduce costul acestui program,

micşorînd marginile libere ale operaţiilor necritice, în limitele permise. Pe fig. 4.7 putem traduce aceasta spunînd că evoluăm pe verticala *ABC* a lui . Plecînd din punctul *C,* atingem *A* reducînd la maximum marginile libere ale operaţiilor necritice.

Plecînd de la programul corespunzător punctului *0* (timpi operatori *Ba),* putem diminua durata totală de execuţie reducînd arbitrar una sau mai multe operaţii critice şi continuînd astfel din aproape în aproape, observînd că, în general, se creează noi drumuri critice. Evoluăm atunci pe figura *OAB,* care reprezintă mulţimea soluţiilor posibile, nescurtînd decît lucrările drumurilor critice. Această abordare a problemei poate fi interesantă dacă figura *OAB* este suficient de aplatizată. Poate fi construit un algoritm pentru a face metoda mecanizabilă.

Dacă acum, la fiecare etapă alegem operaţia sau operaţiile critice, care dau pentru o aceeaşi micşorare de timp cea mai mică creştere a costului, cum am făcut în 4.4, atunci evoluăm pe curba *OA,* locul soluţiilor optimale. Din nefericire se înţelege că o astfel de metodă este inaplicabilă în cazul general cînd curbele cost-durată sînt oarecare şi cînd programul cuprinde mai multe sute de operaţii. Ea nu se aplică uşor decît atunci cînd graful este foarte simplu (de ordinul a zece operaţii) sau atunci cînd, pentru fiecare operaţie, curbele p_{ij} = au forme particulare (parabole, drepte, curbe convexe formate din segmente de dreaptă). Aceste cazuri particulare formează obiectul paragrafelor următoare.

4.6. VARIAŢIA LINIARĂ A COSTULUI ÎN FUNCŢIE DE DURATĂ. PROGRAM LINIAR PARAMETRIC

Se presupune că pentru fiecare operaţie P_o curba costului în funcţie de durată, fie $p_ij=f(t_{ij})$, este o dreaptă (fig. 4.8), adică:

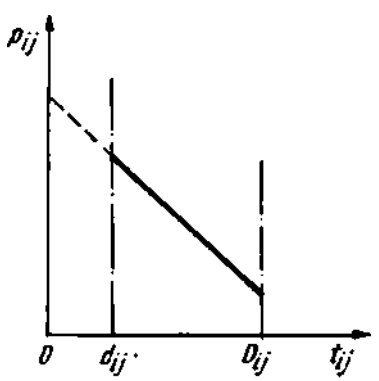


Fig. 4.8

$$Pa = \sim {}^{c}a\ hi \qquad (4.3)$$

cu

$$C\ fu\ C\ . \qquad (4.4)$$

Să considerăm un anumit program, a cărui durată de execuţie este t_{nf} E_n fiind evenimentul final. Ne propunem să minimizăm costul total al acestui program. Aceasta s& traduce prin programul liniar

/ *dij iii*

/ X *hj* f»» pentru orice p e p_B, j Meu (4.5)

[MIN] £ (^. _ Ci./J,

l (».)> eu

unde p_{tt} este mulţimea drumurilor mergînd de la vîrful 1 la vîrful *n;* **U** — mulţimea arcelor care constituie graful programului. Fă-

cînd să varieze durata totală de execuţie a programului t_n şi înlocuind MIN prin MAX, obţinem programul liniar parametric, unde $t_n = X$ este parametrul care variază :

$$\pounds\ t_{tj}\ X, \text{ pentru orice p. e p.}_{„,}, [MAX]\ c_{ij} \quad (4-$$

$t_{,j}$.

(i.i)ev

în cazul particular studiat, dreaptă. Metoda de curba *OA* din fig. 4.7 este o curbă convexă formată din segmente de clasică a programelor liniare parametrice ne permite să obţinem vîrfurile acestei curbe (fig. 4.9).

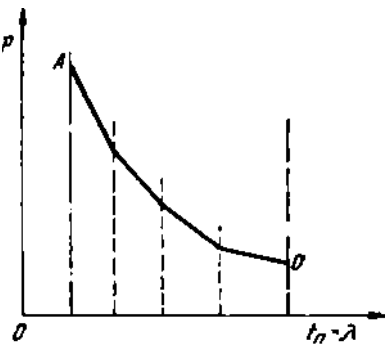


Fig. 4.9

Cunoscînd curba *OA,* locul soluţiilor optimale, planificatorul poate alege programul care răspunde cel mai bine preocupărilor sale, îndreptîndu-şi atenţia fie asupra duratei totale de execuţie a ansamblului lucrărilor, fie asupra costului său total.

pe ideile enunţate pe scurt

Să observăm că metoda fo- iosi tă în rezolvarea unui program liniar parametric se bazează chiar 4.5. De fapt, pentru problemele care ne interesează şi anume optimizarea unui program, au fost elaboraţi mai mulţi algoritmi, care ţin seama de structura foarte particulară a programului liniar parametric (4.6). Aceştia sînt algoritmul lui Kelley [21 şi 22] şi algoritmul lui Fulkerson [231. Aceşti doi algoritmi

sînt sensibil echivalenţi şi ambii au ca punct de plecare dualul programului (4.6).

în paragrafele următoare vom expune complet algoritmul lui Fulkerson.

4.7. ALGORITMUL LUI FULKERSON

4.7.1. ASPECTUL MATEMATIC AL ALGORITMULUI

Notînd mereu cu t_i data de realizare a evenimentului programul (4.6) se poate scrie sub forma :

$$t_{i3} + h \sim \quad 0 \text{ pentru orice } (i, j) \text{ eU}, \tag{4.7}$$

$$- \text{«i+ } t_n < \text{X}, \tag{4.8}$$

$$t_{i\}} < D_{i\}} \text{ pentru orice } (i, j) \text{ e U}, \tag{4.9}$$

$$^{-} hi — <h, \text{ pentru orice } (i,j) \text{ e U}, \tag{4.10}$$

$$[\text{MAX}] \pounds \underset{(\text{i.i})\text{GlJ}}{} \tag{4.11}$$

Costul total al ansamblului lucrărilor p (X) este

$$\text{p(X)} = \pounds\ k_{i3} - \max \underset{(\text{i.J})\text{e o}}{\pounds} \tag{4-}$$

Vom presupune că vîrfurile sînt numerotate respectînd ordinea nivelelor unde sînt plasate (vezi 1.4). Curba p (X) eBte curba $O\ A$ din fig. 4.7, locul soluţiilor optimale. Ecuaţia (4.7) exprimă că trebuie să existe suficient timp între datele evenimentelor X şi E_f pentru a efectua operaţia $P_{i\}}$ în $t_{i\}}$ unităţi de timp şi (4.8) exprimă faptul că durata totală a proiectului este cel mult egală cu X.

Să examinăm dualul programului (4.7) — (4.11). Dacă atribuim variabile de abatere nenegative $f<_{„}$ v, g_{it} , $h_{(}$ restricţiilor (4.7), (4.8), (4.9) respectiv, dualul programului, pentru X fixat şi t, = 0, se scrie astfel:

$$fa + 9u \sim \quad = Cu \text{ pentru orice (i, } j) \text{ e U}, \tag{4-}$$

$$(*,\#)\,\mathbf{u}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{+}} \overset{fii\ \mathrm{X}\ _\ fii\ -}{(i,i)} \quad » \qquad \begin{array}{l} 0 \text{ pentru } i =£ 1 \text{ şi } i =/= n, \\ — v \text{ pentru } i = n \\ + v \text{ pentru } i = 1 \end{array} \tag{4-14}$$

$$[\text{MIN}]\text{fx®+ E } Di, da \sim \text{S } h_{i\}}\ ], \underset{(\quad \text{iVieD} \quad \text{Mie®} \quad)}{\quad} \quad {}_{,415}\text{x}$$

unde UX este submulţimea arcelor grafului incidente în

vîrful *i* către exterior şi UŢ este submulţimea arcelor grafului incidente în

vîrful *i* către interior (fig. 4.10). Cel puţin una din cantităţile g_{ij}, h_{ij} poate fi luată egală cu 0 în soluţia optimală a programului dual şi putem presupune:

0_b=max [0, *Ctj—fi,],* (4.16) h_{ij} = max [0, f_{i}, — c_0]. (4.17)

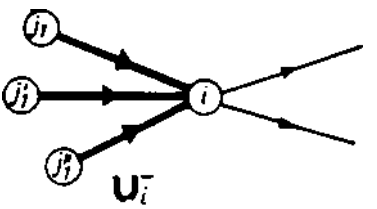


Fig. 4.10

Astfel problema dală poate să fie enunţată după cum urmează: să se găsească numerele nenegative cîte unul pentru fiecare arc al grafului, şi un număr nenegativ *v,* care să satisfacă ecuaţiile (4.14) şi să minimalizeze forma liniară

+ E max ^{c}n ~ fol - X ^{d}a max [0, f_{it} - cj. (4.18) c $_{<i,i>}$ eu

Să transformăm variabilele /y în modul următor. Se înlocuieşte fiecare f_{ij} printr-o sumă de două variabile nenegative :

$$fi) = fl.fi \text{ i} + fiji\ 2 > \tag{4.19}$$

noile variabile fiind supuse la restricţiile :

$$_{fi.i;}\ \text{i} < _{cij}, \tag{4.20}$$

(^{4}-21)

Atunci fa-, i are drept coeficient pe — D_{iS} şi $f_{(tii\ 2}$ are drept coeficient pe — dy în noua formă liniară de minimizat;

$$+ \text{s A> } ^{cu} - \text{S } ^{\wedge i} \, u,i) \text{ e u} \qquad \text{(i,D } _{fi.i;}\ 1 - \qquad £ \, ^{d}ij \, fi.i; 2 \, . \, a,i) \, e \, \text{o}$$

Dacă punem

$$\text{Ci.u t } \begin{cases} {}^{oii} & k = 1, \\ \text{OO} & k = 2; \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\mathbf{A}, \; du \; \begin{matrix} k = 1, \\ k = 2 \; ; \end{matrix} \qquad (4.23)$$

programul dual se scrie neglijînd termenul constant:

$$\text{S X + XX- fa}^{\dagger\dagger\dagger\dagger\dagger}\text{-}_{k\,a.i)}\ \text{ei'»} \qquad \text{/c ii,)) e v»} \qquad i = n, \quad i = 1, \qquad (4.2$$

$$\mathbf{o} \qquad \leqslant c_{i,j;k}, \qquad (4.25)$$

$$[\mathbf{MIN}]\left(\lambda v - \sum_{k}\sum_{(i,j)\in U} d_{i,j;k}\, f_{i,j;k}\right) \qquad (4-$$

Acest program este acela al unei probleme de flux intr-o reţea dedusă din graful proiectului dedublînd toate arcele (fig. 4.11) Fiecare arc (ij;&) al noului graf are o capacitate maximală Cu.» şi îi este afectat un cost Sîntem astfel conduşi la o problemă de flux
maximal, unde funcţia economică de considerat este expresia (4.26). Astfel de probleme fac de cîţiva ani obiectul a numeroase studii, şi sînt cunoscute pentru aceste cazuri particulare metode de calcul superioare metodelor generale ale programării liniare parametrice.

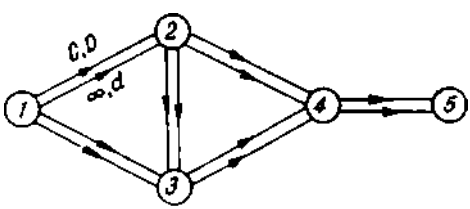


Fig. 4.11

---

†††††† **Acest nou graf poate fi considerat ca suprapunerea a două grafuri diferite prin valorile restricţiilor şi costurilor afectate arcelor. Se poate observa că notaţia folosită In formulele (4.24) — (4.26) nu este in întregime riguroasă, pentru că mulţimea U este dedublată In două submulţimi U, şi U_2. Riguros ar trebui scris pentru (4.26)**

[MIN] [(Xu- S S $d_{i,i,k}$ f_{ijlk}
i *=i (•,)) et't

Timpii operatori optimali t_u ai proiectului, corespunzători datelor t_t produse în cursul procedeului, sînt daţi simplu de :

$$= \min [Aj, h - tj. \qquad (4.27)$$

4.7.2. ASPECTUL TEORETIC AL ALGORITMULUI

Procesul de bază utilizat în algoritmul lui Fulkerson este un proces de marcare a anumitor vîrfuri ale grafului. în general, acest proces este căutarea sistematică a unui lanţ, avînd anumite proprietăţi, de la vîrful 1 la *n*. Cuvîntul *lanţ* prin opoziţie cu cuvîntul *drum* înseamnă că anumite arce pot fi traversate în sens invers orientării lor proprii. Altfel spus, un lanţ este un şir de arce de o orientare oarecare ‡‡‡‡‡).

Procesul de marcare se începe cu un flux ■ *k* şi cu datele *t*, care satisfac condiţiile :

$$ti = 0,$$

$$di.j.k + tf - tj < 0 \qquad = 0, \tag{4.28}$$

$$djjil- + \quad - tj > 0 => fij-.k = Ci.jlk- \tag{4.29}$$

Pentru a simplifica notaţiile, să punem

$$du_i\ k = d_{i\,i}\ ,k + tj - tj\ .$$

Pentru X = *t*„ aceste proprietăţi înseamnă că fluxul / minimizează (4.26). Aceasta se deduce din teorema asupra dualităţii unui program liniar sau se poate vedea direct, observînd că :

$$\sum_{k\ (i./)\ e\ <J} di,i\text{-}kfi.i\text{-}.k = X \sum_{k\ \ (i,j)\ \in U} d_{i,}j\text{-}kfi,i\text{-}k + 5J \sum_{k\ \ (i,j)\ \in U} tilfi\text{-}i\text{--}\ *\ =$$

$$\sum_{k\ (ij)} \sum_{e\ u} d_{i,j;\,k}\, f_{i,j;\,k} + [t_1 - t_n]\, v \tag{4.31}$$

$$y]\ di.i\text{-},kfi,j\text{-}.k - £\,y]\ di.i;kfi,iik$$

$$k\ \ (i,j)\ \in U \qquad\qquad k\ \ (i,j)\ \in U$$

relaţiile (4.29) şi (4.30) înseamnă că *f* maximizează partea stingă a lui (4.31), deci maximizează şi pe cea din dreapta, ceea ce revine la a minimiza (4.26).

Procesul de afişaj se termină, fie cînd vîrful *n* poate fi

---

‡‡‡‡‡ **Pentru o mai mare precizie referitoare la terminologia teoriei grafurilor, cititorul va putea să se oprească la referinţele [1] sau [3].**

| **PORNIRE** | Se calculează $t_2, \ldots, t_n$ prin iteraţie

marcat, fie cînd nici un marcaj nu mai poate fi atribuit şi vîrful „nu este atins.

A marca vîrful *n* înseamnă că s-a găsit nn lanţ de la _1 la *n* astfel încît arcelor orientate în sensul de la 1 la *n* le corespund d<j;* = = 0 şi *Cij-k,* în timp ce arcelor orientate în sens contrar le
corespund *di,j-k*= 0 şi 0. Atunci fluxul se schimbă adăugind **E**
arcelor orientate de la 1 la *n* şi scăzînd e pentru celelalte. Se obţine un nou flux /' pentru care proprietăţile optimale (4.28) — (4.30) sînt întotdeauna verificate.

în cazul în care vîrful *n* nu a putut fi marcat, datele evenimentelor se schimbă scăzînd 3 din datele evenimentelor corespunzătoare vîrfurilor nemarcate. Aceasta nu-l schimbă pe $t_{\pm} = 0$, dar reduce pe t_n = X şi (4.28) - defineşte o nouă mulţime de timpi operatori prin formula (4.27). Cantitatea 8 este aleasă astfel încît noile date *t*| şi vechiul flux / să satisfacă în continuare proprietăţile optimale

Procesul de afişaj descris mai înainte a fost divizat în două părţi. în prima parte se caută un drum de la vîrful 1 la vîrful *n* compus din arce jle capacitate infinită (cele corespunzătoare lui *Ic* = 2), astfel încît *dij.k*= 0. Existenţa unui astfel de drum marchează sfîrşitul calculului, căci aceasta înseamnă că o nouă scădere a lui X ar face programul nerealizabil, timpii operatori ai acestui drum fiind reduşi la maximum. Dacă nu există un astfel de drum, se trece la a doua parte a procesului de afişaj aşa cum este descrisă mai înainte.

Procesul iterativ este început printr-un flux nul şi prin datele *t,* satisfăcînd proprietăţile optimale (4.28) — (4.30). Datele sînt acelea din program corespunzînd punctului 0 din fig. 4.7, punct în care timpii operatori sînt _D_O.

4.8. DETALII ALE PROCEDEULUI ITERATIV UTILIZAT ÎN ALGORITMUL LUI FULKERSON

$$Z_j = 0 \qquad (4-$$

$$_{tj\,-=}\ \mathbf{MAX}\ [Z_4\ -j-_\ _\ ]\ =\ \mathbf{MAX}\ [Z_4\ -|-$$

Se ia

$$f_{i.} \qquad 0 \qquad (4.33$$

| FAZA A | Procesul de afişa j

Prima parte

Se atribuie vîrfului 1 marcajul [—, —, —, e (1) = oo]. în cazul general, se ia un vîrf notat *i* şi se caută un alt vîrf *j* astfel încît *(i, j*; 2) să fie un arc al grafului şi

$$d.j;2 = 0. \qquad (4.34)$$

Se marchează atunci vîrful *j* cu [i, 2, + , e, = oo] .

Se repetă această operaţie de marcare din aproape în aproape pînă cînd vîrful *n* ajunge că fie marcat sau nu. în primul caz, calculul este terminat. în al doilea caz, se trece la partea a doua.

Partea a doua

Vîrfurile marcate mai înainte îşi păstrează marcajul şi procesul de afişaj continuă după cum urmează. Se] ia un vîrf *i* care este marcat şi se caută un vîrf *j* nemarcat astfel încît *(i,j; k)* să fie un

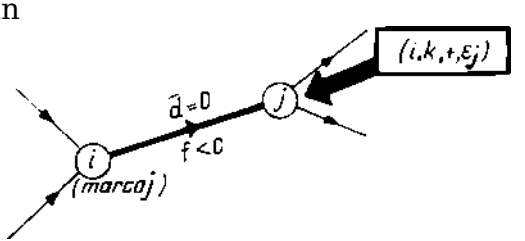


Fig.

arc al grafului cu

$$d_{i,j,k} = 0, \qquad c_{i,j;k} \qquad (4.35)$$

sa (j, *i;* &) să fie un arc al grafului, cu

$$: k == 0, \; f_{j}t; \; fc0. \qquad (4.36)$$

în primul caz [relaţiile (4.35)], vîrful *j* primeşte marcajul e.l. unde

$$e, = \min [e_4, (cu;* \qquad (4\text{-}37)$$

în al doilea caz [relaţiile (4.36)], vîrful *j* primeşte Cb *ki* , *£.■l,*

$$ej = \min [e_{4i} \quad]. \qquad (4.38)$$

Se repetă această operaţie de marcare din aproape în aproape. Dacă vîrful *n* a putut fi marcat prin acest procedeu, se trece la faza B ; dacă nu, se trece la faza C.

Eventualităţile (4.35) şi (4.36) sînt reprezentate, respectiv,

pe digurile 4.12 şi 4.13.

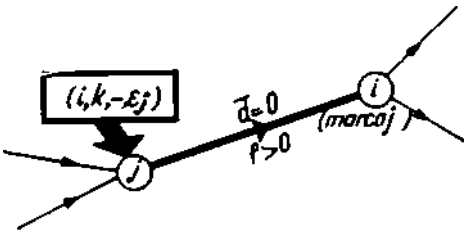


Fig. 4.13

| FAZA B ! Schimbarea fluxului

Vîrful *n* a fost marcat. Să schimbăm fluxul după cum urmează. Vîrful *n* fiind marcat [j, *k, + ,* **E„**], să adăugăm e,, *la>f*$_{jn-k}$, apoi 6ă trecem la vîrful *j.* Procedeul general este atunci: dacă vîrful *p* este marcat [i, *k,* +, e_P], se adaugă **E„** la/^;* ; dacă vîrful *p* este marcat *[i,k,* **E„]** se scade **E„** din *fp^k',* în ambele cazuri se
trece la vîrful *i.* Se repetă operaţia pînă cînd vîrful 1 este atins, adică **E„** a fost adăugat la un arc (1, *j ; k).*

Să ştergem acum toate marcajele şi să reluăm faza A.

Ambele eventualităţi de mai sus sînt reprezentate, respectiv, pe figurile 4.14 şi 4.15.

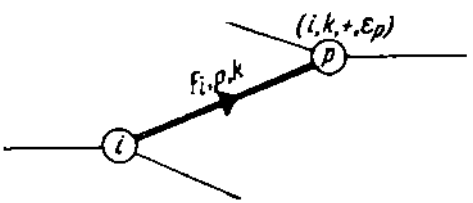


Fig. 4.14

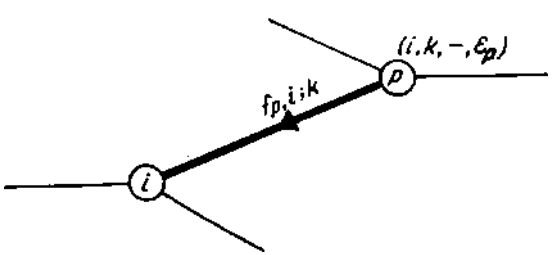


Fig. 4.15

FAZA C | Schimbarea datelor evenimentelor

Vîrful *n* n-a putut fi marcat. Să definim mulţimile de arce Aj şi A_2:

$$^{A}i = \{ (i, 3 ; \quad i \text{ marcat}, j \text{ nemarcat}, di\ i.t < 0), \quad (4.39)$$

$$^{A}z = \{ (i,3 ; \quad |i \text{ nemarcat.}, j \text{ marcat}, di.,;* > 0\} \quad (4.40)$$

Să calculăm

$$3j = MIN [- d_{U:t}], \quad (4\text{-}41)$$

$$3_2 = MIN [d\hat{}j; *], \quad (4.42)$$

Să luăm

$$8 = \min (8_n S_2). \quad (4\text{-}43)$$

Să schimbăm datele vârfurilor *i* scăzind 8 din toţi t, corespunzători unui vîrf *i* nemarcat.

Să ştergem acum toate marcajele şi să reluăm faza A.

Un arc al mulţimii Ai este prezentat pe fig. 4.16 şi un arc al mulţimii A_2 este reprezentat pe fig. 4. 17.

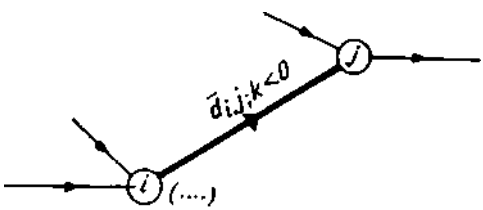


Fig. 4.16

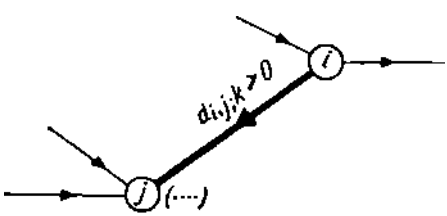


Fig. 4.17

în concluzie, algoritmul generează fluxuri succesive şi date t_t care satisfac proprietăţile (4.28) — (4.30). Curba *OA,* locul soluţiilor optimale, este liniară între două valori succesive ale lui X = t_n generate de algoritm.

Costul total al ansamblului lucrărilor este dat, pentru fiecare valoare a lui X calculată, de relaţia

$$p\,(\mathrm{X}) = K — [\mathrm{X}® — 5]£\ d_{iii;k} \qquad (4.44)$$

*** (».!) e c**

unde K este constanta :

$$K = \mathrm{E}\ [\text{^-^.,^1-} \qquad (4\text{-}45)$$

(<j') e v

Metoda descrisă mai înainte se generalizează la cazul în care ourbele $Pa = f\,(\$_w)$ nu sînt numai segmente de dreaptă pentru fiecare operaţie, ci curbe convexe formate din segmente de dreaptă între d_o şi D_{ir} Aceasta introduce în graf un arc suplimentar din vîrful *i* la vîrful *j* pentru fiecare punct unghiular al curbei $p_{ij} => f\,(t_{(i)})$ (fig. 4.18 şi fig. 4.19).

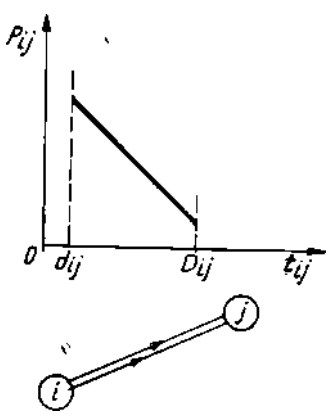


Fig.

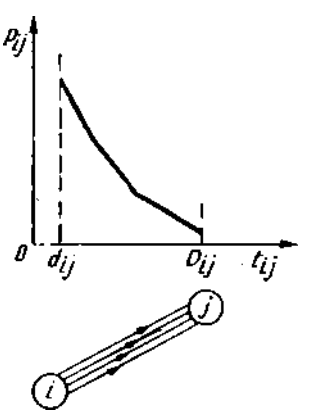


Fig.

4.9. EXEMPLU *) DE APLICARE A ALGORITMULUI LUI FULKERSON

Un exemplu simplu va permite cititorului să se familiarizeze cu acest algoritm, al cărui aspect teoretic poate părea greoi.

Se consideră un program de lucrări al cărui graf este acela din fig. 4.20. Tabelul 4.4 dă valorile lui , D_{iit} şi c_{itj}.

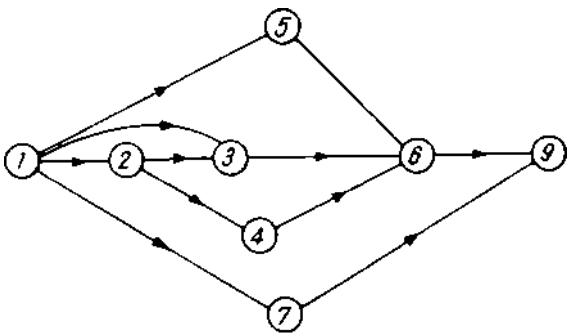


Fig. 4.20

Tabelul 4.4

	%	ᵖ<.!	ᶜi.i
*1.2	11	20	1,00
G.3	30	50	1,50
	32	52	3.00
^fl>8	6	8	5,00
ᶦ1.3	12	36	4,66
	21	27	6.00
	25	50	1,00
«1.5	33	36	1,00
^5.6	60	80	2,00
	12	22	1,30
«7 8	50	90	2,00

♦) **Am reluat un exemplu dat tn [20], dar calculul este făcut aici**

cu ajutorul algoritmului lui Fulkerson.

Pornirea

Se calculează datele evenimentelor luînd pe Z),,- ca valoare a timpului operator prin metoda generală (prezentată în capitolul 1) şi ale cărei formule sînt amintite în (4.32). Se ia pentru fiecare arc un flux nul. Programul este acela care corespunde punctului zero din fig. 4.7.

în fig. 4.21 datele evenimentelor sînt încadrate. Numerele din paranteză sînt marginile libere ale operaţiilor. Se vede că Xj = = t_n = 130.

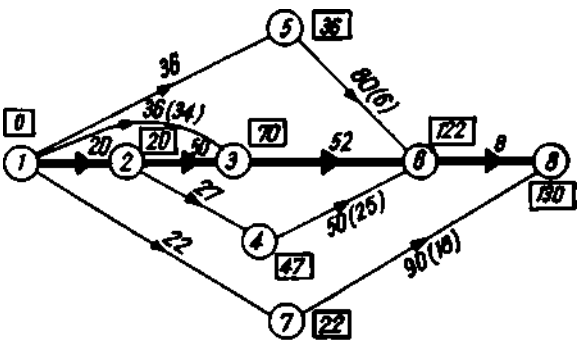


Fig. 4.21

Procesul de afişaj

1° Pentru a întreprinde procesul de afişaj trebuie să începem prin a calcula pentru fiecare arc valorile

$$\text{di./; 1} = D_{it}j + ti - t_t$$

$$\text{djj: 2} = di\ ) + ti - tj\ .$$

Aceste valori sînt reproduse în tabelul 4.5.

FAZA A. în coloana di.j;$_2$ nu există zerouri; se trece atunci direct la partea a doua a procesului de afişaj, utilizînd coloana lui di.,.1:

di,2. i = 0 şi /i.2, i = 0 < Ci,2, i= 1,0;

Tabelul 4.5

Operaţia	*tj — tj*	*; 1 " + tj — y*	*di.}; + ti -tj*
(1,2)	**0 - 20 = - 20**	**20 - 20 = 0**	**11 - 20 = - 9**
(2,3)	**20 - 70 = - 50**	**50 - 50 = 0**	**30 - 50 = - 20**
(3,6)	**70 - 122 = - 52**	**52 - 52 = 0**	**32 - 52 = - 20**
(6,8)	**122 - 130 = - 8**	**8 - 8 = 0**	**6 - 8 = - 2**
(1,3)	**0 - 70 = - 70**	**36 - 70 = -34**	**12 - 70 = - 58**
(2,4)	**20 - 47 = - 27**	**27 - 27 = 0**	**21 - 27 = - 6**
(4,6)	**47 - 122 = - 75**	**50 - 75 = - 25**	**25 - 75 = - 50**
(1,5)	**0 - 36 = - 36**	**36 - 36 = 0**	**33 - 36 = - 3**
(5,6)	**36 - 122 = - 86**	**80 - 86 = - 6**	**60 - 86 - - 26**
(1,7)	**0 - 22 = - 22**	**22 - 22 = 0**	**12 - 22 = - 10**
(7,8)	**22 - 130 = -108**	**90 - 108 = - 18**	**50 - 108 = - 58**

se atribuie vîrfului *2* marcajul [1, 1, + , 1].

dîs. i = 0 şi /2.3.1 = 0 < C2.3.1 = 1,50,

E (3) = min **[E₂,** Ca.s. i —/2.3.1] = min [1,1,5] = 1;

se atribuie vîrfului 3 marcajul [2, 1, + , 11 etc.

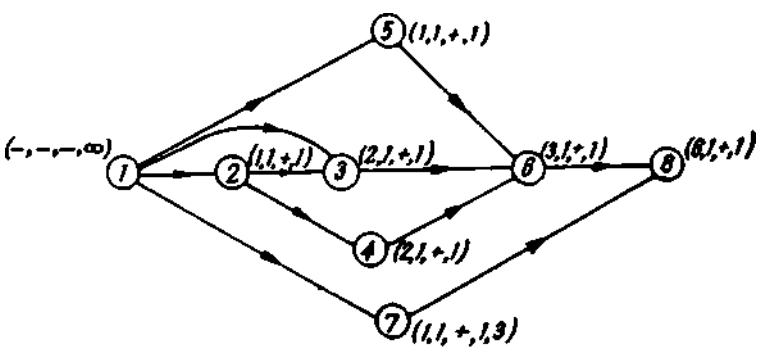


Fig. 4.22

Vîrful 8 este atins şi poartă marcajul [6, 1, + , 1] (fig.

4.22).

FAZA B. Fluxul este mărit cu o unitate şi devine 1 în arcele (1, *2, 1), (2,3, 1),* (3,6, 1), (6, 8, 1),

în timp ce în celelalte arce fluxul rămîne 0.

FAZA A. Se reîncepe procesul de afişaj cu acest flux nou. Nu se mai poate marca vîrful 2, pentru că

$$f_{1.2.1} = 1 = C_{i.2.1}\ .$$

Singurele vîrfuri care se pot marca sînt vîrfurile 5 şi 7 (fig. 4.23).

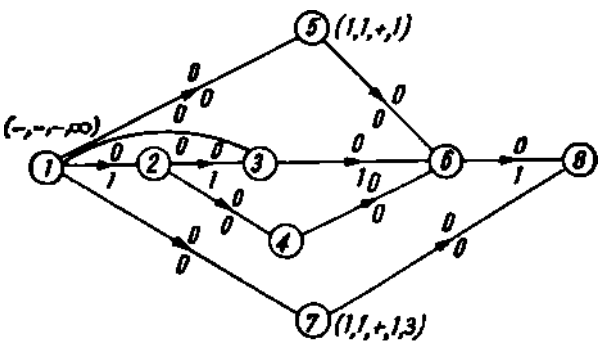


Fig. 4.23

Vîrful 8 nefiind marcat se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulţimea A_r

$$- \quad d_{1.2;\ 2} = 9,$$

$$- \quad d_{i\ 3;\ 2} = 58, — d_{i,3;i} = 34,$$

$$- \quad d_{s,6;2} = 26, — d_{5,6;\ i} = 6,$$

$$- d_{7.fi;\ 2} = 58, \qquad - d_{i.s;\ 1} — 18,$$

$$8_t = \text{MIN}\ [- d_{O:i}] = 6,$$

3 = 6.

De aici rezultă noile date ale evenimentelor marcate (fig. 4.24). Noile date sînt încadrate. Fluxurile nu figurează pe acest graf.

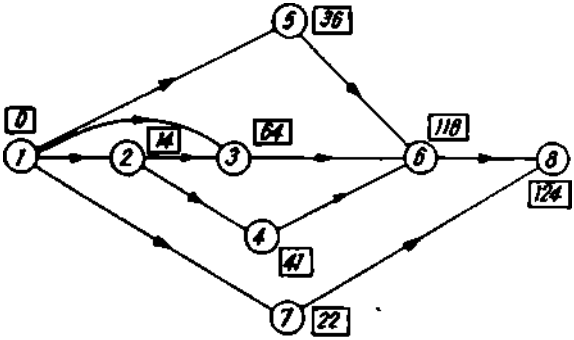


Fig. 4.24

Să calculăm acum creşterea costului total al ansamblului lucrărilor.

După (4.44),

$$p\,(X) = K — [X® — £$$

Pentru X = 130 :

p (130) = X, pentru căfi.,$_{;4}$ = 0 pentru toţi i,j şi k.

Pentru X = 124 :

$$p(124) = K - [\ 124 — (20 + 50 + 52 + 8)] = K— (-6).$$

•^124

Creşterea costului total este atunci Ap = 6.

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27) :

$$<ij = \min\ [D_{i\,f,}\ (\hat{} - t_t)]$$

şi graful programului optimal t_8 = X = 124 este acela din fig.

4.25. Numerele încadrate sînt datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori. Numerele din paranteze sînt marginile libere ale operaţiilor corespunzătoare. P_{13} are ca margine liberă 28; P_{ie} are ca margine liberă 25 şi $P_{7\ 8}$ are ca margine liberă 12. Există două drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8] şi [1, 5, 6, 8].

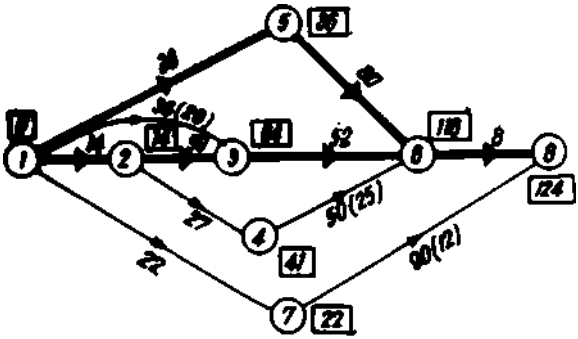


Fig. 4.25

2° înainte de a ne întoarce la faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.6), analog tabelului 4.5, cu toate datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.6

Operaţia	*ti-tj*	**; 1 =** *Di.j + ti — tj*	**dv;; 2 " di->** *+ 'i~ <4*
(1.2)	**0 - 14 = - 14**	**20 - 14 = 6**	**11 - 14 = - 3**
(2.3)	**14 - 64 = - 50**	**50 - 50 = 0**	**30 - 50 = - 20**
(3,6)	**64 - 116 = - 52**	**52 - 52 = 0**	**32 - 52 = - 20**
(6,8)	**116 - 124 = - 8**	**8 - 8 = 0**	**6 - 8 = - 2**
(1,3)	**0 - 64 = - 64**	**36 - 64= - 28**	**12 - 64 = - 52**
(2,4)	**14 - 41 = - 27**	**27 - 27 = 0**	**21 - 27 = - 6**
(4,6)	**41 - 116 = - 75**	**50 - 75 = - 25**	**25 - 75 = - 50**
(1,5)	**0 - 36 = - 36**	**36 - 36 = 0**	**33 - 36 = - 3**
(5,6)	**36 - 116 = - 81**	**80 - 80 = 0**	**60 - 80 = - 20**
(1,7)	**0 - 22 = - 22**	**22 - 22 = 0**	**12 - 22 = - 10**
(7,8)	**22 - 124 = - 102**	**90 - 102 = - 12**	**50 - 102 = - 52**

FAZA A. în coloana *dij-z* nu există zerouri, se trece deci direct la partea a doua a procesului de afişa j folosind coloana *di,j-i :*

di,5; i = 0 şi /i,5; i = 0 < Ci.5; i = $c_{1>5}$ = 1,00 ;

vîrful 5 va fi deci marcat [1, 1, 4- , 1]. La fel vîrful 6 va fi marcat [5, 1, + , 1]. Begula (4.36) permite marcarea vîrfurilor 3 şi 2 etc. Se obţine graful din fig. 4.26.

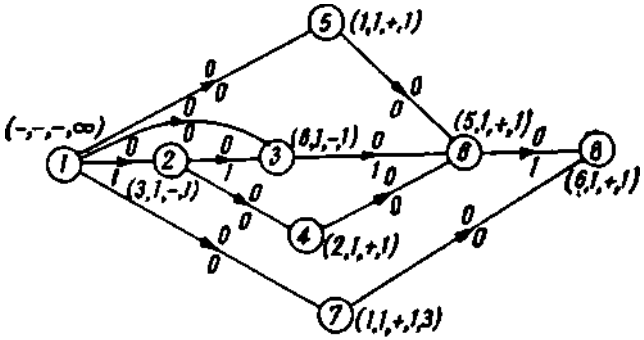


Fig. 4.26

Vîrful 8 a fost marcat, se poate deci mări fluxul trecînd la faza B. **FAZA** B. Fluxul este mărit cu o unitate în arcele: (6, 8; 1), (5, 6 ; 1) şi (1, 5 ; 1), el rămânînd neschimbat în celelalte arce.

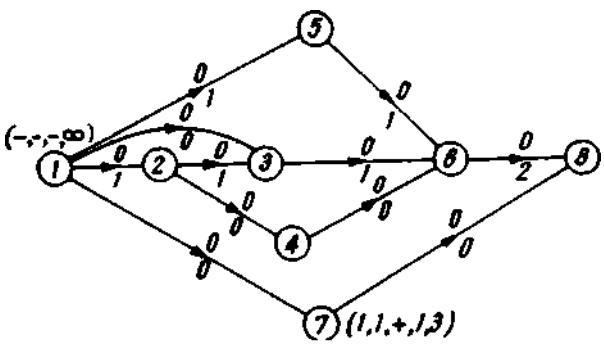


Fig. 4.27

FAZA A. Se reîncepe procesul de afişaj cu acest nou flux.

Nu se mai poate marca vîrful 5 pentru că, deşi = 0, avem

acum = C1.5 = !•

Singurul vîrf care se poate marca este vîrful 7 (fig. 4.27). Vîrful 3 nefiind marcat se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulţimea $\mathbf{A_r}$

— **dî,2:2 = 3**

— dl,3; 2 = 52, — dl,3; 1 = 28,

— **dl,6; 2 = 3**

– dî.e; 2 = 52, — dî.B: i = 12,

8, = MIN[- $d_{W:}$ *] = 3,

8 = 3.

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate din figura precedentă.

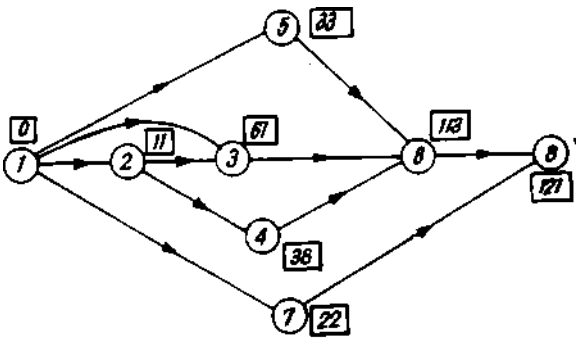


Fig. 4.28

Noile date sînt încadrate înfig. 4.28. Fluxurile nu figurează în acest graf. Aplicarea formulei (4.44) dă

$$p\,(121) = K - [121 \times 2 - (\underline{Z_{124}} + 36 + 80 + 8)]$$

■^121

unde Z_{124} este cantitatea 20 + 50 + 52 + 8 pe care am întîlnit-o în calculul lui Ap pentru X = 124.

Creşterea costului total Ap în raport cu p (130) este

$$Ap = p(121) - p(130) = 130 + 124 - 242 = 12.$$

Mai general, se poate arăta că la fiecare iteraţie creşterea costului total Ap este dată de formula

$$A\,p = Z_o + (v - v_0)\,X_o - v\,X,$$

unde Z_o, v_0 şi X_o se referă la iteraţia precedentă şi $Z = Z_o + (® - ®_0)\,X_o$. La fel, creşterea costului în raport cu iteraţia precedentă este

$$A'p = Ap - Ap_0,$$

în cazul de faţă, avem

$$A'p = 12 - 6 = 6.$$

Graful programului optimal $t_a = X = 121$ este cel din fig. 4.29,

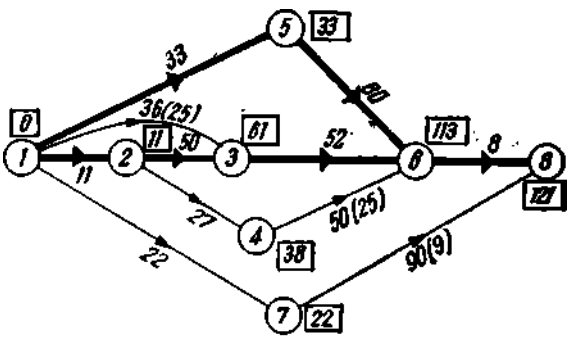


Fig. 4.29

Numerele încadrate reprezintă datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori. Numerele dintre paranteze sînt marginile libere ale operaţiilor

corespunzătoare : $P_{1>3}$ are ca margino liberă 25 ca şi $P_{4>6}$; P_{7i8} are ca margine liberă 9.

Există două drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8] şi [1, 5, 6, 8].

3° înainte de a ne reîntoarce la faza A, să stabilim un nou tabel (tabelul 4.7), analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.7

Operaţia	$l_i - t_j$	$d_{i/j}$; I = v_i) +(i -	v_{i-j}; 2 " <*i $_{i + li \sim h}$
(1,2)	0 - 11 = - 11	20 - 11 = 9	11 - 11 = 0
(2,3)	11 - 61 = - 50	50 - 50 = 0	30 - 50 = - 20
(3,6)	61 - 113 = - 52	52 - 52 = 0	32 - 52 = - 20
(6,8)	113 - 121 = - 8	8 - 8 = 0	6 - 8 = - 2
(13)	0-61 = - 61	36 - 61 = - 25	11 - 61 = - 49
(2,4)	11 - 38 = - 27	27 - 27 = 0	21 - 27 = - 6
(4,6)	38 - 113 = - 75	50 - 75 = - 25	25 - 75 = - 50
(1,5)	0 - 33 = - 33	36 - 33 = 3	33 - 33 = 0
(5,6)	33 - 113 = - 80	80 - 80 = t)	60 - 80 = - 20
(1,7)	0 - 22 = - 22	22 - 22 = 0	12 - 22 = - 10
(7,8)	22 - 121 = - 99	90 - 99 = - 9	50 - 99 = - 49

FAZA A. Există acum două zerouri în coloana di,,-; 2. Vîrfurile
5 şi 2 vor fi deci marcate [1, *2, + ,* oo],

32.3;1 = 0 şi /2.S; 1 = 1 < c2.3; 1 — 1,50 j

vîrful 3 va fi deci marcat [2,1, + , 0,50]. La fel, vîrful 6 va fi marcat £3, 1, +, 0,50] etc.

Se obţine graful din fig. 4.30.

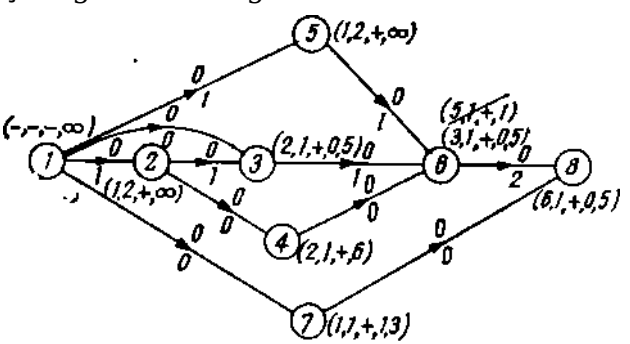


Fig. 4.30

Se vede că vîrful 6 are două marcaje corespunzătoare respectiv vîrfurilor anterioare 5 şi 3. în acest caz, se ia la

alegere unul sau altul dintre marcaje şi se şterge marcajul sau marcajele neselecţionate.

Aici reţinem pentru vîrful 6 marcajul [3, 1, +, 0,50].

Vîrful 8 a fost marcat, deci se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 0,50 în arcele (6,8; 1), (3,6; 1), (2,3 ;1) şi (1,2 ;2). Trebuie să considerăm aici arcul (1,2 *;2)* pentru că marcajul vîrfului 2 este [1, 2, +, oo]. Ştim că, de fapt, arcele din figurile precedente sînt dedublate, cum se vede în fig. 4.11, deşi acest lucru nu este reprezentat în figurile precedente. Fluxurile arcelor *(i,j* ;2) vor fi de acum înainte notate *deasupra* arcelor.

FAZA A. Se reîncepe procesul de afişaj cu acest nou flux. Vîrful 6 este marcat [5, 1, +,1] şi vîrful 8 este marcat [6, 1, +,1J. Se obţine graful din fig. 4.31.

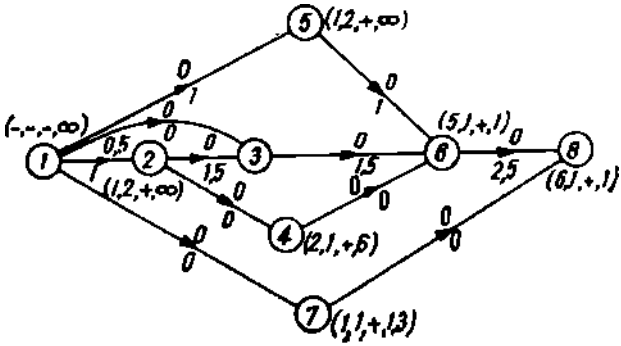


Fig. 4.31

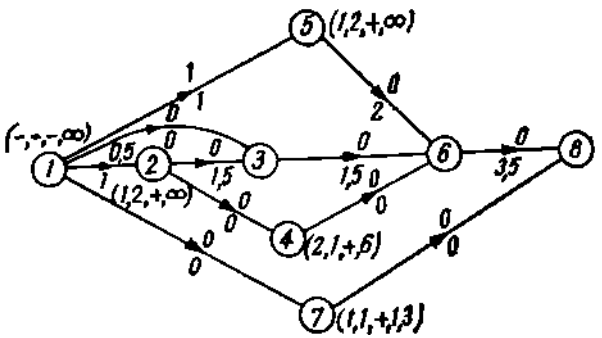


Fig. 4.32

Se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 1 în arcele (6, 8; 1), (5, 6; 1) şi (1, 5; 2).

FAZA A. Se reîncepe procesul de marcare cu acest nou flux. Nu se mai poate marca vîrful 6 pentru că, deşi $d_{56;1} = 0$, avem acum

$$/5.6: 1 = C5,6; 1 == C5.6 = 2,00.$$

Vîrfurile marcate sînt trecute în fig. 4.32.

Vîrful 8 nefiind marcat se trece la faza C.

FAZA C. Se ia în considerare numai mulţimea Aj pentru

că nu există arce *(i,j; k)* cu vîrful *i* nemarcat şi vîrful *j* marcat.

— di.3:2 — — di.s; i — 25,
— d2,3; 2 =
-- ds.g; 2 =
— *di.i;* 2 = — dg.a; i = 25,
— *di.8* ,2 = — dî.B; 1 = 9,

= MIN [- A, - *di.j-.k*] = 9,

8 = 9.

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate figura precedentă.

Noile date sînt încadrate fig. 4.33. Fluxurile nu în acest graf.

Creşterea costului total în raport cu *p* (130) este

$$Ap = \underline{£_{121} + (3,5 — 2) \cdot 121} — 3,5 \cdot 112$$

■^112

sau

$$Ap = 254 + 181,5 - 392 = 43,5.$$

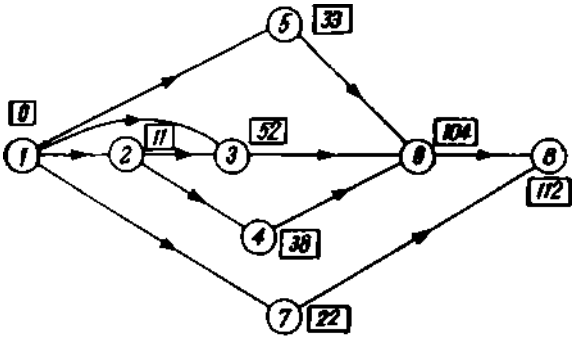


Fig. 4.33

Şi creşterea costului în raport cu p (121) este

$$A'p = 43{,}5 - 12 = 31{,}5.$$

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27) :

$$ti., = \min [Ai, (\text{«}, - *<)]\bullet$$

Graful programului optimal $t_s = X = 112$ este cel din fig. 4.34.

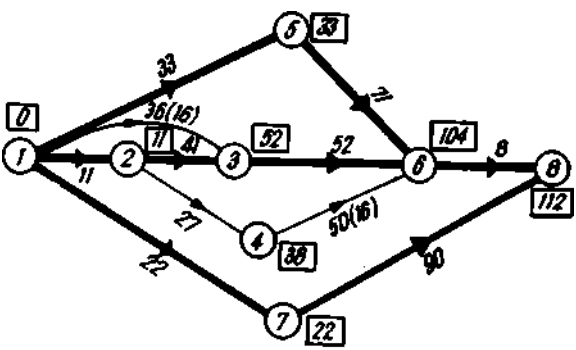


Fig. 4.34

Numerele încadrate reprezintă datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori, iar numerele din paranteze sînt marginile libere ale operaţiilor corespunzătoare. $P_{1\text{-}3}$ are margine liberă 16, la fel ca $P_{i\,6}$.

Există trei drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8]; [1, 5, 6, 8] şi [1, 7, 8].

4° înainte de a ne întoarce la faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.8) analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.8

Operaţia	<i - <7	dii.'i - I>i.1 + - 0	di.;a ■= dt.j + ft ⁻ h
(1,2)	0 - 11 = - 11	20 - 11 = 9	11 - 11 = 0
(2,3)	11 - 52 = - 41	50 - 41 = 9	30 - 41 = - 11
(3,6)	52 - 104 = - 52	52 - 52 = 0	32 - 52 = - 20
(6,8)	104 - 112 = - 8	8 - 8 = 0	6 - 8 = - 2
(1,3)	0 - 52 = - 52	36 - 52 = - 16	12 - 52 = - 40
(2,4)	11 - 38 = - 27	27 - 27 = 0	21 - 27 = - 6
(4,6)	38 - 104 = - 66	50 — 66 = — 16	25 - 66 = - 41
(1,5)	0 - 33 = - 33	36 - 33 = 3	33 - 33 = 0
(5,6)	33 - 104 = - 71	80 - 71 = 9	60 - 71 = - 11
(1,7)	0 - 22 = - 22	22 - 22 = 0	12 - 22 = - 10
(7,8)	22 - 112 = - 90	90 - 90 = 0	50 - 90 = - 40

FAZA A. Există două zerouri în coloana di.,;2 • Vîrfurile 5 şi 2 vor fi deci marcate [1, 2, + , oo).

$$dl,7;\ 1 = 0 \text{ şi } /1,7;\ 1 = 0 < c_i\ 7;\ i = c_{17} = 1,30\ ;$$

vîrful 7 va fi deci marcat [1, 1, +, 1,30].

De asemenea vîrful 8 va fi marcat [7, 1, +, 1,30]. Se obţine graful din fig. 4.35.

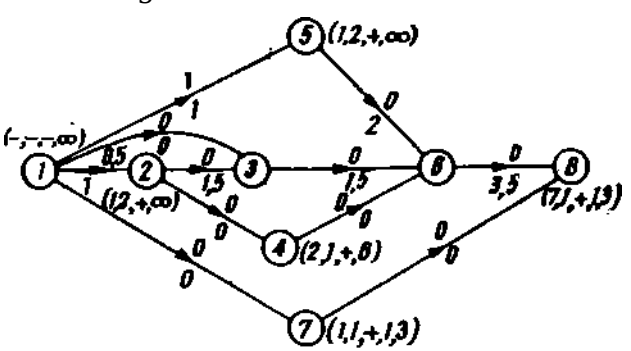


Fig. 4.35

Vîrful 8 fiind marcat, se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 1,3 în arcele (7,8 ;1) şi (1,7 ;1). El rămîne neschimbat în celelalte arce.

FAZA A. Se reîncepe procesul de marcare cu acest nou flux. Nu se mai poate marca vîrful 8 pentru că, deşi $d_{1>7;1} = 0$, avem acum

$$/1;7,1 - Ci; 7.1 = Cj; 7 = 1,3.$$

Vîrfurile marcate sînt indicate pe fig. 4.36, ca şi noile fluxuri.

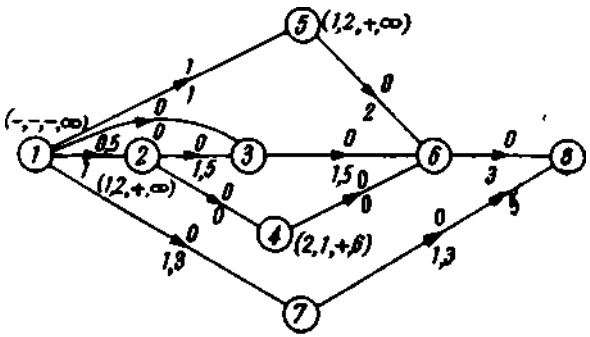


Fig. 4.36

Vîrful 8 nefiind marcat, se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulţimea Aj pentru că nu există arce (i, *j -,k)* cu *i* nemarcat şi *j* marcat.

$$- \quad dl\ 3;\ 2 = 40, \quad - 21.3;\ i = 16,$$

$$- \quad dl,7;\ 2 = 10,$$

$$- \quad d2,3;\ 2 = 11,$$

$$- \quad ds.6;\ 2 = 11,$$

$$- - d4,\#;2\ ^{1}\ 41, \ - \ d4,6;l = 16,$$

$$= MIN\ [- 2,-.,_{;i}] = 10,$$

8 = 10.

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate din figura precedentă.

Noile date sînt încadrate în fig. 4.37. Fluxurile nu figurează în acest graf.

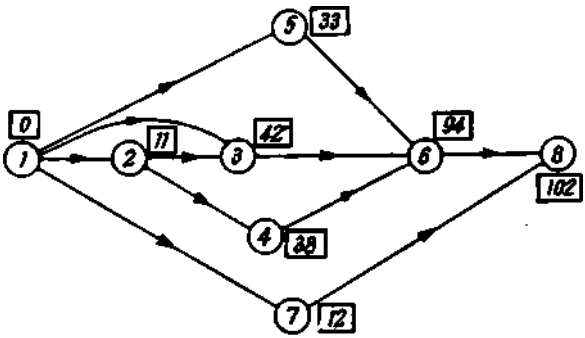


Fig. 4.37

Creşterea costului total în raport cu p (130) este

$$Ap = \frac{Z_{112} + (4,8 - 3,5)\ 112}{\blacksquare^{\wedge}102} - 4,8 -102$$

sau

$$Ap = 435,5 + 145,6 — 489,5 = 91,5.$$

Creşterea costului în raport cu p (112) este

$$A' p = 91,5 - 43,5 = 48 .$$

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27) :

$$= \min \mathbf{[D_M,}\ (t, — tJJ.$$

Graful programului optimal t_s= X = 102 este cel din fig. 4.38. Numerele încadrate reprezintă datele evenimentelor. Numerele înscrise pe arce sînt timpii operatori, iar numerele din paranteze sînt marginile libere ale operaţiilor corespunzătoare. -f*13 are ca margine liberă 6, la fel ca şi P_i

6.

Există trei drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8]; [1, 5, 6, 8] şi [1, 7, 8].

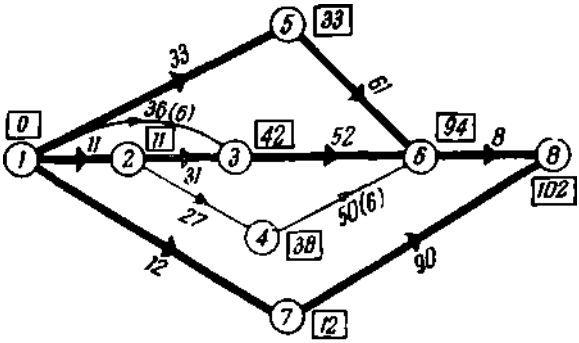


Fig. 4.38

5° înainte de a reîncepe faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.9), analog tabelului (4.5), cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.9

Operaţia	*ti ~ ti*	**di.fci =•** *Dij +* *~~ tj*	**dj.ja** *“ d# + ti — bj*
1,2	**0 - 11 = - 11**	**20 - 11 = 9**	**11 - 11 = 0**
2,3	**11- 42 = - 31**	**50 - 31 = 19**	**30 - 31 = - 1**
3,6	**42 - 94 = - 52**	**52 - 52 = 0**	**32 - 52 = - 20**
6,8	**94 - 102 = - 8**	**8-8=0**	**6 - 8 = - 2**
1,3	**0 - 42 = - 42**	**36 - 42 = - 6**	**12 - 42 = - 30**
2,4	**11 - 38 = - 27**	**27 - 27 = 0**	**21 - 27 = - 6**
4,6	**38 - 94 = - 56**	**50 - 56 = - 6**	**25 - 56 = - 31**
1,5	**0 - 33 = - 33**	**36 - 33 - 3**	**33 - 33 = 0**
5,6	**33 - 94 = - 61**	**80 - 61 = 19**	**60 - 61 = - 1**
1,7	**0 - 12 = - 12**	**22 - 12 = 10**	**11 - 12 = 0**
7,8	**12 - 102 = - 90**	**90 - 90 = 0**	**50 - 90 = - 40**

FAZA A. Există acum trei zerouri în coloana $d_{!j\ ;2}$.
Vîrfurile 5, 2 şi 7 vor fi deci marcate cu [1, 2, +, oo] .

dî.s: i = 0 şi **/T.8: I** = 1,30 < $c_{78;}$ i = C73 = 2,00.

Vîrful 8 va fi deci marcat cu [7, 1, +, 0,70] (fig. 4.39).

Se poate mări fluxul trecînd la faza B.

FAZA B. Fluxul este mărit cu 0,70 în arcele (7,8 ;1) şi (1,7 ;2). El rămîne neschimbat pretutindeni în rest.

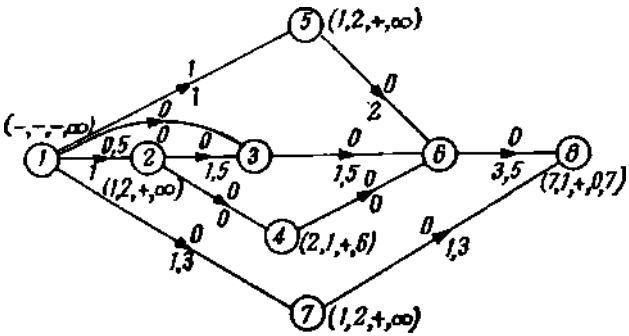


Fig. 4.39

FAZA A. Se reîncepe procesul de marcare cu acest nou flux. Nu se poate marca vîrful 8, pentru că

$$fi, \mathbf{8; 1 = 07,8: 1 = 07,8} = 2{,}00.$$

Vîrfurile marcate sînt indicate pe fig. 4.40, ca şi noile fluxuri. Vîrful 8 nefiind marcat, se trece la faza C.

FAZA C. Se consideră numai mulţimea Aj pentru că nu există arce *(i,j*; fc) cu *i* nemarcat şi *j* marcat:

– $\mathbf{dl,3;2} = 30$, – $\mathbf{di,8;l} = 6$,

– $\mathbf{da.S; 2} = 1$,

– $3i,6;2 = 31$, — $die;, = 6$,

– $\mathbf{ds,6; 2 = 1}$,

---- $\mathbf{d7,8; 2} = 40$,

$$8! = \text{MIN}\,[\,-\,d_{O:t}\,] = 1,$$

8 = 1.

De aici rezultă noile date ale evenimentelor nemarcate din figura precedentă.

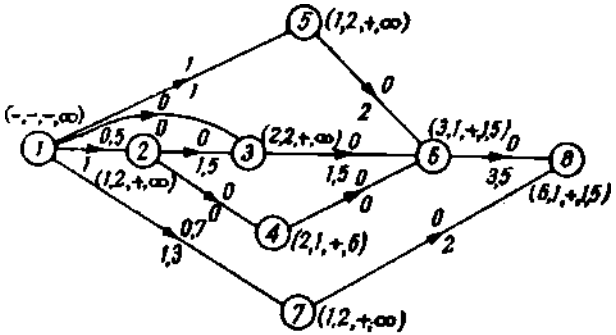


Fig. 4.40

Noile date sînt încadrate în fig. 4.41. Fluxurile nu figurează în acest graf.

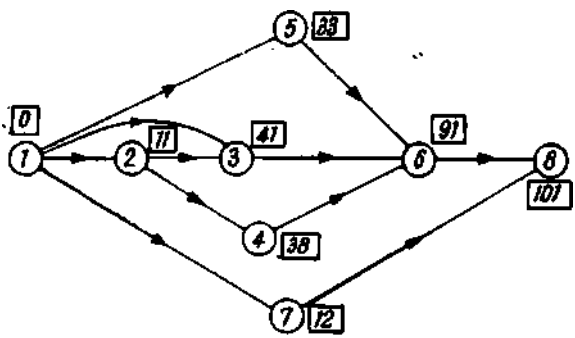


Fig. 4.41

Creşterea costului total în raport cu p(130) este

$$Ap = Z_{102} + (5,5 - 4,8) -102 - 5,5 -101 \text{ sau}$$
$$Ap = 581,1 + 71,4 - 555,5 = 97,$$

iar creşterea costului în raport cu p(102) eBte

$$A'p = 97,0 - 91,5 = 5,50.$$

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27) : min [P_w, ((,-/;)]•

Graful programului optimal t_8= X = 101 este cel din fig. 4.42. P_{13} are ca margine liberă 5, la fel ca şi $P_{i\,a}$.

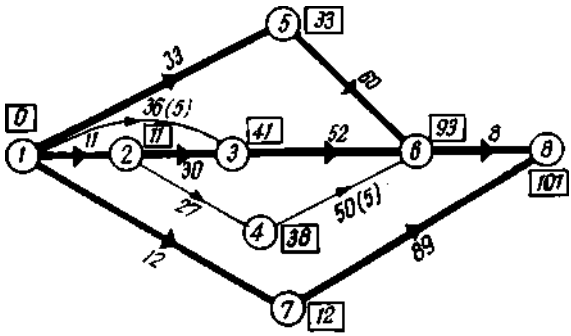


Fig. 4.42

Există trei drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8], [1, 5, 6, 8] şi [1, *7,* 8], 6° înainte de & trece din nou la faza A, trebuie să stabilim un nou tabel (tabelul 4.10), analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.10

Operaţia	ti — ij	= — (j j dij'.'a ~	+ t i — *ti*
(1,2)	0 - 11 = - 11	20 - 11 = 9	11 - 11 = 0
(2,3)	11 - 41 = - 30	50 - 30 = 20	30 - 30 = 0
(3,6)	41 - 93 = - 52	52 - 52 = 0	32 - 52 = - 20
(6,8)	93 - 101 = - 8	8-8=0	6 - 8 = - 2
(1,3)	0 - 41 = - 41	36 - 41 = - 5	12 - 41 = - 29
(2,4)	11 - 38 = - 27	27 - 27 = 0	21 - 27 = - 6
(4,6)	38 - 93 = - 55	50 - 55 = - 5	25 - 55 = - 30
(1,5)	0 - 33 = - 33	36 - 33 = 3	33 - 33 = 0
(5,6)	33 - 93 = - 60	80 - 60 = 20	60 - 60 = 0
(1,7)	0 - 12 = - 12	22 - 12 = 10	12 - 12 = 0

(7,8) **|12 - 101 = - 89 | 90 - 89 = 1 | 50 - 89 = - 39**

FAZA A. Există cinci zerouri în coloana di., 2 . Vîrfurile 2, 5 şi 7 6Înt marcate [1, 2, + , oo]- Vîrful 3 este marcat [2, 2, +, oo] şi vîrful 6 este marcat [5, 2, + , oo],

$$d3,6\text{-}, i = 1 \text{ şi } /a\ 6{:}i = 1{,}50 < Ca.eji = {}_{c_{3,6}} = 3{,}00.$$

Vîrful 6 mai are deci şi marcajul [3, 1, +, 1,50].

Vîrful 8 este marcat [6, 1, +, 1,50] şi se şterge marcajul [5, 2, +, oo] al vîrfului 6 (fig. 4.43). Se poate mări fluxul trecînd la faza B.

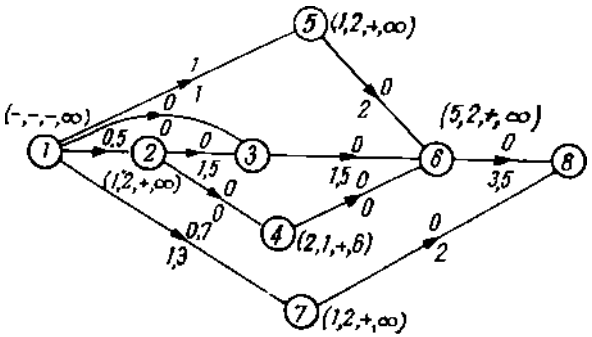


Fig. 4.43

FAZA B. Fluxul se măreşte cu 1,50 în arcele (6, 8,1), (3, 6; 1), (2, 3 ; 2) şi (1, 2 ; 2), rămînînd în rest neschimbat.

FAZA A. Vîrful 8 nu mai poate fi marcat pentru că :

$$/e,8;\ 1 = 06.8{:}\ 1 = 06.8 = 5,\ 00.$$

Vîrfurile marcate sînt indicate pe fig. 4.44, ca şi noile fluxuri. Vîrful 8 nefiind marcat, se trece la faza C.

FAZA C.

— $de.8;\ 2 = 2,$

— $dî.s;\ 2 = 39,$

$$8j = MIN\ [\ —\ _{dij\text{-}.k}\ ] = 2,\ 8 = 2.$$

De aici rezultă noua dată a lui 8, singura care este schimbată şi este egală acum cu 99. Noul graf este cel din fig. 4.45.

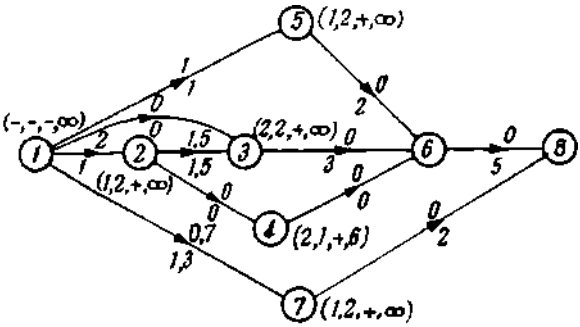


Fig. 4.44

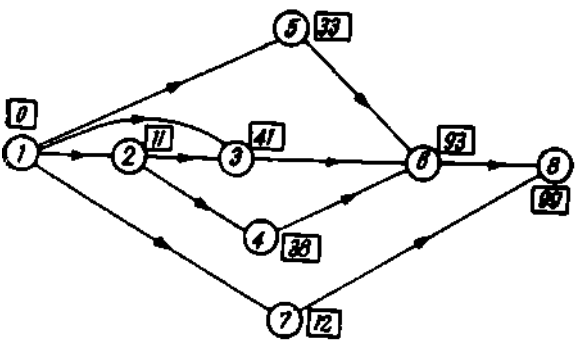


Fig. 4.45

Fluxurile nu sînt indicate pe figură.

Creşterea costului total în raport cu p (130) este

$$Ap = \underline{Z_{lol} + (7 — 5{,}5) \bullet 101} \text{ - 7-99}$$

^99

$$Ap = 652{,}5 + 151{,}5 - 693 = 111.$$

Creşterea costului în raport cu p (101) este

A'p = 111 - 97 = 14.

Timpii operatori sînt calculaţi prin formula (4.27): $t_{it)} = \min$ [Z>(,, (t,- /,)].

Graful programului optimal t_a ■■= X = 99 este cel din fig. 4.46. P_{13} are ca margine liberă 5, la fel ca şi P_{4t9}.

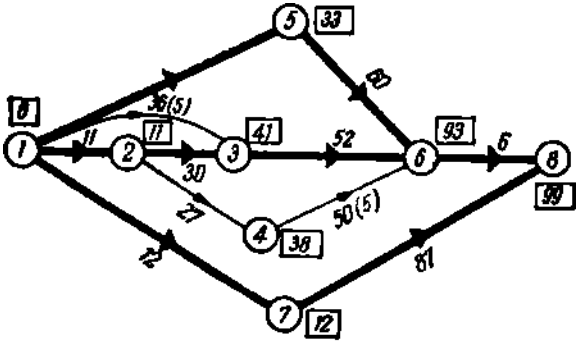


Fig. 4.46

Există trei drumuri critice : [1, 2, 3, 6, 8], [1, 5, 6, 8] şi [1, 7, 8]. 7° înainte de a trece din nou la faza A, trebuie stabilit un nou tabel (tabelul 4.11), analog tabelului 4.5, cu datele calculate mai înainte.

Tabelul 4.11

Oper&fl*			; 2 " ~ G'
1,2	**0 - 11 = - 11**	**20 - 11 = 9**	**11 - 11 = 0**
2,3	**11 41 = - 30**	**50 - 30 = 20**	**30 - 30 = 0**
3,6	**41 - 93 = - 52**	**52 - 52 = 0**	**32 - 52 = - 22**
6,8	**93 - 99 = - 6**	**8-6=2**	**6 - 6 = 0**
1,3	**0 - 41 = - 41**	**36 - 41 = - 5**	**12 - 41 = - 29**
2,4	**11 - 38 = - 27**	**27 - 27 = 0**	**21 - 27 = - 6**
4,6	**38 - 93 = - 55**	**50 - 55 = - 5**	**25 - 55 = - 30**
1,5	**0 - 33 = - 33**	**36 - 33 = 3**	**33 - 33 = 0**
5,6	**33 - 93 = - 60**	**80 - 60 = 20**	**60 - 60 = 0**
1,7	**0 - 12 = - 12**	**22 - 12 = 10**	**12 - 12 = 0**
7,8	**12 - 99 = - 87**	**90 - 87 = 3**	**50 - 87 = - 37**

FAZA A. Se atinge vîrful 8 prin arce *(i,j* :2) : drumul [1, 5, 6, 8] (fig. 4.47).

Calculele s-au terminat

S-a atins punctul A pe curba soluţiilor optimale din fig. 4.7. Tabelul 4.12 rezumă calculul paginilor precedente.

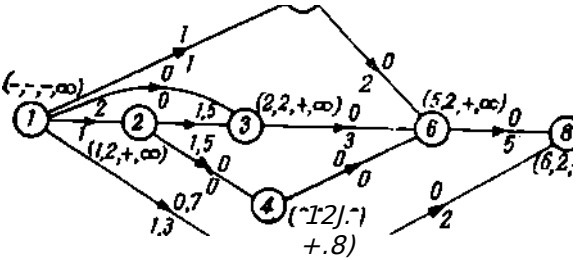
reprezintă
marginea liberă a operaţiei P_{ij} sau *(i,* j)].

Tabelul 4.12

Operaţiile *Pii*	Timpii operatori: *tt.j*						
	°	1	2	3		6	
(1,2)	20	14	11	11	11	11	11
(2,3)	50	50	50	41	31	30	30
(3,6)	52	52	52	52	52	52	52
(6,8)	8	8	8	8	8	8	6
(1,3)	36	36	36	36	36	36	36
■^IJ>	34	28	25	16	6	5	5
(2,4)	27	27	27	27	27	27	27
(4,6)	50	50	50	50	50	50	50
	25	25	25	16	6	5	5
(1,5)	36	36	33	33	33	33	33
(5,6)	80	80	80	71	61	60	60
1^4.»	6	—	—	—	—	—	—
(1,7)	22	22	22	22	12	12	12
(7,8)	90	90	90	90	90	89	87
	18	12	9	-	—	—	—
fg = X	130	124	121	112	102	101	99
A/Q	—	6	3	9	10	1	2
Ap	—	6	12	43,5	91,5	97	111
A'p	—	6	6	31,5	48	5,5	14
A'p/Af$_8$	—	1	2	3,5	4,8	5,5	7,0

Se poate trasa de asemenea curba *OA,* locul soluţiilor

optimale (fig. 4.48). Aceasta este o curbă convexă formată din segmente de dreaptă. Pantele succesive ale acestor segmente de dreaptă sînt date în ultimul rînd al tabelului 4.12. Acest exemplu de apbcare a algo-



Va*,*

, *Fig. 4.47)

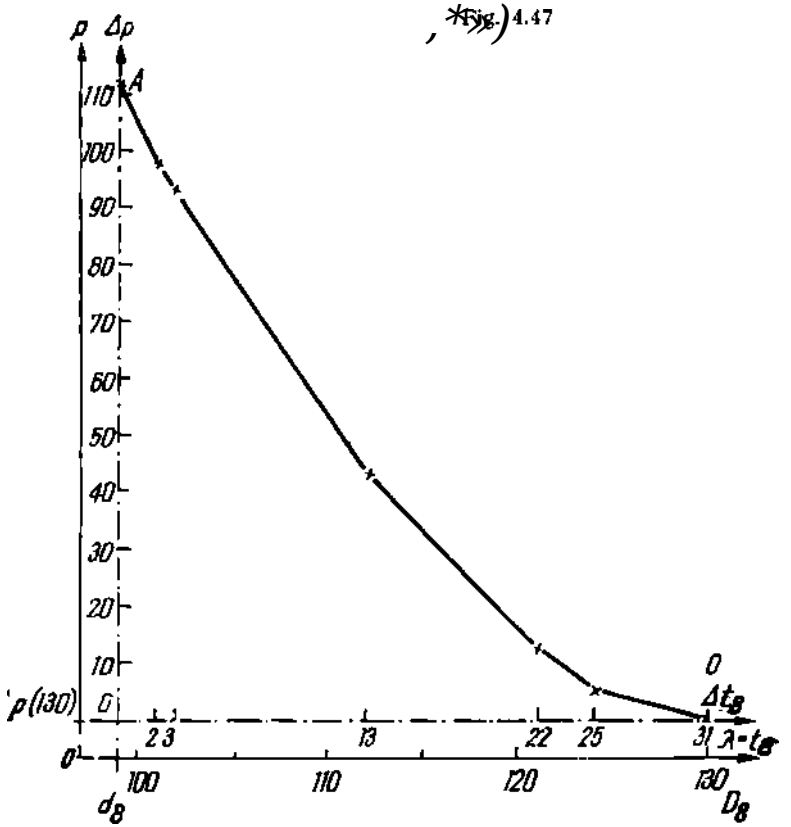


Fig. 4.48

ritmului lui Fulkerson a putut părea plictisitor. Totuşi nu este inutil să tratăm complet un exemplu şi să studiem în amănunţime toate ■operaţiile pentru a avea siguranţa că algoritmul s-a înţeles bine.

Evident, îndată ce graful posedă mai mult de 15 arce, calculul devine imposibil de realizat cu mijloacele obişnuite şi trebuie încredinţat unui calculator electronic.

4.10. PROGRAM OPTIMAL

Cu ajutorul programării liniare parametrice (vezi 4.6) sau mai bine cu ajutorul algoritmului lui Fulkerson (vezi 4.7 şi 4.8) a fost posibil să se traseze curba *O A,* locul soluţiilor optimale. Dar oprirea unei instalaţii sau întârzierea în livrarea unui ansamblu (uzină, vapor, imobil etc.) se poate traduce, în anumite cazuri, printr-un cost care este funcţie de durata totală a lucrărilor. Acesta va fi, de exemplu, „lipsa de cîştig", în cazul unei instalaţii industriale, în exemplul simplu al construcţiei unei vile, acest cost va fi pierderea pentru cumpărător cauzată de cheltuielile de hotel. Daeă putem estima sau calcula acest cost, *c* = <p *(t„),* soluţia optimă, din punct de vedere economic, va fi cea corespunzătoare minimului funcţiei

$$\text{r } (t_{„}) = p\,(/_{„}) + \text{<p } (t_{„}),$$

unde *p* (t_B) este costul de construcţie considerat mai înainte.

Dacă *c* = <p ($Z_{„}$) are o formă simplă (dreaptă sau curbă convexă formată din segmente de drepte) putem calcula direct programul optimal printr-o simplă programare liniară.

Dacă *c* = <p (t_o) are o formă mai puţin simplă, vom obţine programul optimal printr-o rezolvare grafică, aducînd pe aceeaşi figură curba *O A,* locul soluţiilor optimale,

obţinută prin algoritmul lui Fulkerson, şi curba c = <p (<„) (fig. 4.49).

Programul optimal este cel corespunzător punctului O din fig. 4.49. Durata totală a lucrărilor este atunci

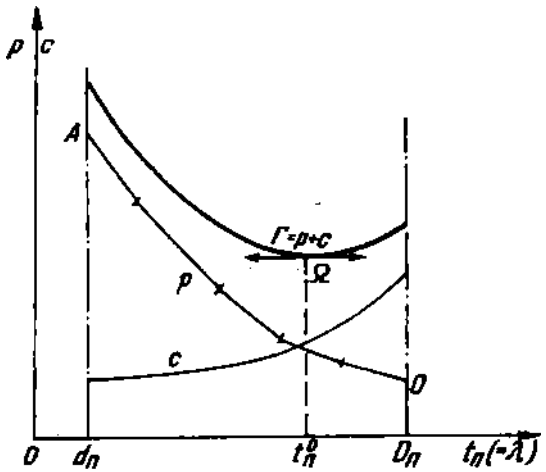


Fig. 4.49

4.11. OPTIMIZAREA UNUI PROGRAM CÎND DURATELE OPERAŢIILOR SÎNT ALEATOARE

Pînă în prezent ne-am situat în cazul în care pentru un cost dat, durata unei operaţii era bine determinată.

Vom presupune acum că timpii operatori sînt aleatori şi că timpii operatori medii variază în funcţie de costuri. Mărimile examinate la capitolul 2 : m_{it} , b_{ilf} t_{it} şi u?, vor fi acum funcţii de
costurile p_{ir}

Să punem

$$^{r}u, = \text{y- Şi } r_{2ij} = \quad \bullet \qquad (4.46)$$

'il hi

Să ne amintim că

$a_{t)}$ este estimaţia optimistă a timpului operator;
b_{i} este estimaţia pesimistă a timpului operator;
m_{tj} este estimaţia cea mai probabilă a timpului operator;

$t_{t)}$ = (*«) este timp operator mediu; este dispersia.

Să presupunem că r_{Ul} şi r_{2il} sînt independente de t_{tJ} şi sînt constante pentru o activitate în care bugetul alocat variază.

Restricţii anumite trebuie impuse lui r_{lit} şi r_{2iJ}. într-adevăr, este uşor de văzut, deoarece

$$hi = \underset{0}{\sim} ({}^{a}u + 4\ m_{tj} + b_{lt}),$$

că

$$1{,}20 - 0{,}20 \qquad r_{Ul} \qquad (4.48)$$

sau

$$6\ 5\ r_{2}u\ {}^{r}m\ 1{,}20 \qquad 0{,}20\ r_{2il}$$

şi că

$$1{,}00 > r_{w}\ 0. \qquad (4.49)$$

Dispersia este

$$< = [| \qquad \sim « J\ ]^2 = (r_{2lJ} - r_{Ui}y\ t\% \ . \qquad (4.50)$$

Astfel, cînd datorită unei alocaţii suplimentare de credit, timpul operator mediu descreşte, la fel se întîmplă şi cu abaterea-tip $\mathbf{G_{J}}$, iar coeficientul de variaţie rămîne constant şi este egal cu

$$\underset{\mathbf{O}}{V}\ (r_{2ij} - r_{iy}).$$

Estimaţia cea mai probabilă este redusă de asemenea :

$$m» = \underset{4}{4}\text{- } [6 — (r_{iw} + r_{2O})l\ t_{ij}. \qquad (4.51)$$

Ipoteza, potrivit căreia dispersia timpului operator scade cu valoarea medie t_{ij}, cînd costul unei operaţii creşte, adică cînd i se afectează un buget mai important, este întrutotul acceptabilă.

Să ilustrăm acest aspect de optimizare a unui program pe un exemplu simplu.

Figura 4.50 reprezintă graful unui anumit program. Să presupunem că variaţia costului unei operaţii în funcţie de durata sa medie este liniară, aşa cum am făcut la aplicarea algoritmului lui Fulkerson.

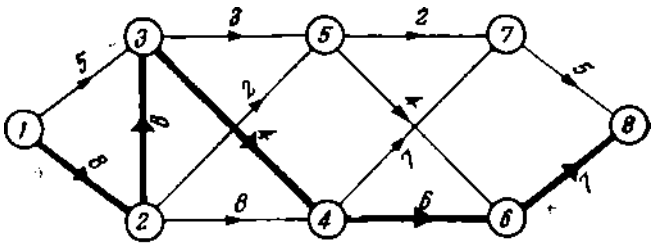


Fig. 4.50

Numerele plasate pe arcele grafului din fig. 4.50 corespund timpilor operatori medii ai programului normal.

Tabelul 4.13

Operaţia		Cost normal	t_{ij}	cost max.	t_{ij}	t_{2tj}
^1.3	10,0	1 000	5,0	1 500	0,70	1,40
*1.3	5,0	600	4,0	800	0,90	1,20
^2.3	6.0	300	3,0	400	0,50	3,00
*2.4	8,0	2 000	5,0	3 000	0,95	1,10
*2,5	2,0	200	2,0	200	0,75	2,00
*3.4	4,0	1 000	3,0	1 000	0,90	1,70
*3.5	3,0	700	3,0	700		
*4,6	6,0	800	5,0	1 200	0,60	2,50
$p_{t.1}$	7.0	200	6.0	200		
P5.4	4,0	750	3,0	850		
	2,0	50	1,0	50		
$P_{Q.B}$	7,0	900	6,0	1 000	0,70	1,50
P 7.8	5,0	1 000	4,0	4 000		

în tabelul 4.14 s-au trecut costurile şi duratele medii ale diferitelor programe care corespund punctelor unghiulare ale curbei *OA,* locul soluţiilor optimale (fig. 4.51).

Tabelul 4.14

Programul nr.	Abatere	Durata medie (în săptămîni)	Cost (în F)	Durata proiectului la diferite praguri de siguranță			
				0,1	0,01	0,001	0,0001
0	3,5	33	95 000	37,7	41,2	43,9	46,0
1	3,5	32	95 000	36,7	40,2	42,9	45,0
2	3,2	31	95 334	35,3	38,5	41,0	42,9
3	3,1	26	100 334	30,1	33,1	35,5	37,3
4	3,0	25	101 334	29,0	32,0	34,3	36,2
5	2,5	23	108 667	26,4	28,9	30,8	32,3
6	2,3	22	112 667	25,3	27,3	29,1	30,4

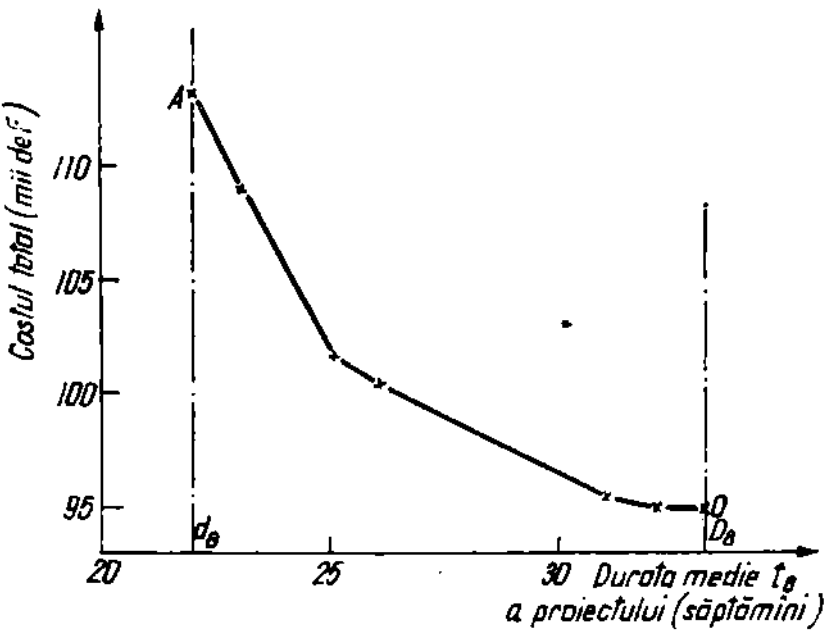


Fig. 4.51

Cele patru coloane din dreapta tabelului 4.14 indică datele pentru care probabilităţile de nerealizare a proiectului la aceste date sînt 0,1; 0,01; 0,001 şi 0,0001. De exemplu, cu programul 0, probabilitatea ca timpul de

realizare a proiectului să fie superior lui 41,2 este 0.01. Altfel spus, există 99 de cazuri favorabile din 100 pentru ca proiectul să fie realizat într-un timp inferior sau egal cu 41,2 săptămîni.

Coloanele din dreapta tabelului 4.14 sînt utilizate în alegerea programului de întreprins. De exemplu, dacă dispunem de 32 săptămîni pentru a duce la bun sfîrşit proiectul şi dacă acest număr de 32 săptămîni este imperativ, se va alege programul 5 care oferă o siguranţă excelentă. Dimpotrivă, dacă 32 săptămîni nu este un număr obligatoriu, ci doar o indicaţie aproximativă, se va alege programul 1.

în concluzie, ideile dezvoltate în acest paragraf vor permite organizatorului să ţină seama, într-o anumită măsură, de riscurile datorate caracterului aleator al duratelor operaţiilor, în momentul alegerii programului de urmat.

CONCLUZII

Cu ocazia acestui studiu, unde au fost prezentate aspectele principale ale metodei PERT şi îmbunătăţirile sale recente, ar fi nimerit să 8e înfăţişeze căile de dezvoltare viitoare ale acestor metode.

Am introdus noţiunea de eveniment decizional într-un graf de program. Credem că aceasta este o primă schiţă pentru a se încerca introducerea conceptelor programării dinamice în stabilirea unui program. Am abordat apoi problema alocării optimale a resurselor bugetare între diferitele operaţii. în viitor, ar trebui să se examineze problemele afectării optimale în material şi mijloace umane între diferitele operaţii ale programului, ţinînd seama de restricţiile temporale şi tehnice şi aceasta pentru o cantitate dată în mijloace materiale şi în personal, căci problemele concrete se pun, cel mai des, în aceşti termeni.

Acestea sînt, după părerea noastră, căile pe care trebuie să se îndrepte cercetările pentru îmbunătăţirea metodelor de stabilire a programelor.

Credem, totuşi, că aplicarea metodei PERT, aşa cum a fost prezentată în această lucrare, va permite planificatorului de a aborda problemele care îl preocupă cu o precizie mai mare.

Cu ocazia unui voiaj în S.U.A. am putut constata că metoda drumului critic era folosită aproape peste tot, de la întreprinderi mijlocii pînă la întreprinderi foarte mari. în particular, proiectul Apollo care a permis oamenilor să pună piciorul pe Lună, proiectul cel mai formidabil din cîte au fost întreprinse vreodată şi ale cărei operaţii se numără cu zecile de mii, este organizat în întregime pornind de la metoda drumului critic, singura, după avizul specialiştilor N.A.S.A.

şi ai North American Aviation Inc., care poate realiza coordonarea completă a activităţii a sute de mii de persoane, în sute de uzine, a situaţiilor sau a rezultatelor a nenumărate studii şi experienţe, în sfîrşit, singura care permite un control eficace de către direcţiile de întreprinderi şi de administraţie.

în Franţa, metoda drumului critic este de asemenea din ce în ce mai folosită, şi pentru a convinge cititorul de aceasta am dori să-l trimitem la o lucrare *) care dă o privire sugestivă a importanţei acestei metode. Cele două exemple pe care le-am dat în 2.6, sînt de altfel articole condensate, prezentate în această lucrare, a cărei lectură va fi extrem de utilă pentru cei care doresc să treacă la aplicaţii efective. Iată diferitele capitole ale acestei cărţi şi numele autorilor :

— Fizionomia şi tratarea problemelor de ordonanţare (Physio- nomie et traitement des problemes d'ordonnancement) de B. Roy.

— Cercetarea operaţională în construcţii (Recherche opâration- nelle dans le bâtiment) de P. Pacaud.

— Ordonanţa rea operaţiilor şi personalului în utilizarea unui tunel-cofraj (Ordonnancement des opdrations et du personnel dans l'utilisation d'ttn coffrage-tunnel) de J. de Rosinski.

— Ordonanţarea lucrărilor de întreţinere într-o rafinărie (Ordonnacement des travaux d'entretien dans une raffinerie) de D. CarrA

— Ordonanţarea operaţiilor de armament la şantierele Atlanticului (Ordonnancement des op^rations d'armement aux Chantiers de l'Atlantique).

— Contribuţia teoriei grafurilor la studiul problemelor de ordonanţare (Contribution de la th^orie des graphes ă l'dtude des problemes d'ordonnancement) de B. Roy.

— Utilizarea metodei FLPL în rezolvarea unei probleme de ordonanţare (Utilisation de F.L.P.L. dans la r^solution d'un probleme d'ordonnancement) de P. Darnaut şi G. Sandier.

— Problemele de ordonanţare cu restricţii disjunctive (Les problemes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives) de Ph. Tuan Nghiem.

Metoda drumului critic favorizează realizarea exactităţii, a clar- viziunii şi de asemenea a îndrăznelii; este un frumos exemplu de aplicare a matematicii în organizare.

) Les Problfemes d’ordonnancement, SoFRO, Dunod, 1964.

ANEXE

REPARTIŢIA P

(B - A)"+v+ip(a + l,y + 1)

Repartiţia p este o repartiţie referitoare la o variabilă aleatoare t cuprinsă în intervalul [J., B] unde $A > 0$ şi $B > 0$, şi a cărei densitate de probabilitate este

$$f(/) = 0, \quad -oo < t < A$$

(1.1)

$$= 0, \; B < t < oo,$$

unde

$$P(m, n) = C \; x^{m} \hat{}\text{-} (1 - x\}'\text{-}' Ax = \frac{}{r\,(m + n)} \qquad (1\text{-}2)$$

este funcţia lui Euler de prima speţă şi

$$T(r) = (\, a?^{r\text{-}l} e^{-l} da? \qquad (1.3)$$

este funcţia lui Euler de speţa a doua.

Figura 1.1 dă aspectul acestei repartiţii pentru valori date ale parametrilor.

Se consideră de asemenea repartiţia p standardizată prin relaţia

$$t = A + (B - A)u, \qquad (1.4)$$

ceea ce dă după transformare

$$<p\,(u) = 0, \quad -\infty < u < 1,$$

$$\frac{u^{\alpha}\,(1-u)^{\beta}}{p(\alpha+1,\beta+1)} \qquad 0 < 1, \tag{1-5}$$

$$= 0, \quad 1 < u < \infty.$$

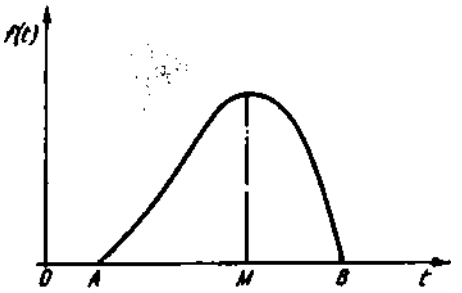


Fig. I.1

Pentru repartiţia p standardizată avem

$$u = E(u) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2} \tag{1-6}$$

$$t = E(i) = A + (B - A)\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 3)} \tag{1-7}$$

şi pentru repartiţia p nestandardizată

$$\frac{(B - A)^2 (« + 1) (Y + 1)}{(a + Y + 3) (a + Y + 2)^!}$$

Pe de altă parte, moda acestei ultime funcţii corespunzătoare lui /' (t) = 0 are ca valoare

$$\frac{\hat{}Ay+Ba,}{a + Y} \qquad (1.10)$$

ceea ce permite să-l scriem pe *t* în felul următor :

$$\mathbf{t} = E(t) = \text{A + B +(« + Y) Af}$$

în metoda PEET s-a ales :

$$a = 2 + ţ<2, \qquad (1\text{-}12)$$

sau

$$Y = 2 - y2 \qquad (113)$$

$$a = 2 — | \hat{}2, \qquad (1\text{-}14)$$

$$Y = 2 + V2. \qquad (1\text{-}15)$$

Acestea dau

$$_{2} = \frac{(B - A)*(» + 1)\ (Y + 1)}{(a + Y + 3)\ (a + Y + {}^{2})^{2}}{}^{\circ T} \quad \frac{(B - A)^{2}}{36} _ \{ \frac{B - A}{6} |^{a} \sim (\quad J \qquad (1.17)$$

9e admite deci pentru t o valoare aproximativă dacă

$$_{M} \frac{(2 - V2)\ A + (2 + Î2)\ B}{} \qquad (1.18)$$

sau dacă

$$_{M}, \frac{(2 + \hat{}2)\ A + (2 - V2)\ B}{4} \qquad (1.19)$$

II

VALOAREA MEDIE A UNUI DRUM CRITIC ÎNTR-UN GRAF DE PROGRAM*

în această anexă, propunem o metodă de aproximare a valorii medii a unui drum critic într-un graf de program, în care valorile arcelor sînt variabile aleatoare.

După cum am văzut, de obicei se înlocuieşte fiecare repartiţie prin media sa şi astfel ne găsim în faţa unei probleme deterministe. Această estimaţie este întodeauna optimistă:

(11.1)

Vom descrie un mijloc de a calcula o aproximaţie mai bună / aBtfel încît

(11.2)

II.l. IPOTEZE ŞI NOTAŢII

Vîrfurile grafului sînt numerotate l,2,...,n astfel încît, dacă există un arc de la vîrful *i* la vîrful *j,* atunci $i < j$ (fig. II.l). Arcele sînt numerotate (1), (2),..., (m).

Uf reprezintă mulţimea (sau fasciculul) de arce incidente în vîrful *i* către interior (fig. II.2).

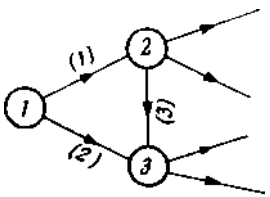


Fig. II.1

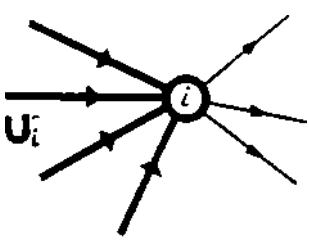


Fig. II.2

') **Această expunere este extrasă**

Pe graful din fig. II. 1 avem

$$Ur = 0,\ U_2\text{-} = \{(1)\},\ U_3\text{-} = \{(2), (3)\} \text{ etc.}$$

în acelaşi fascicul repartiţiile valorilor arcelor pot fi independente, dar se va presupune că repartiţiile diferitelor fascicule sînt independente.

Dacă otj,..., a_t sînt arcele U_i^- (fig. II.3), lui fasciculului

$$U_{(}\sim = \{a_n\ .\ .\ .,\ a^{\S\S\S\S\S\S}\} \qquad \text{(II.3)}$$

îi corespunde

$$ti)" = \quad , ta_k)> \qquad \text{(II.4)}$$

unde t_a este valoarea aleatoare a arcului a_t, adică, mai precis, durata aleatoare a operaţiei reprezentate prin arcul

$$p(i_{t7}) \qquad \text{(II.5)}$$

este repartiţia *vectorului timp operator tv~.*

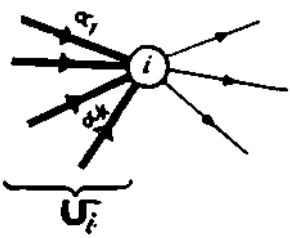


Fig. II.3

Pentru anumite valori

$$/ = (<!, <2, \blacksquare \bullet \bullet ; t_m) \qquad \text{(II.6)}$$

ale arcelor grafului

$$p(t) = p(t_v\text{-})\ p(t_v\sim)\ \ldots p(f_v\sim). \qquad \text{(II.7)}$$

este probabilitatea unui astfel de aranjament şi

$$k\,(0 \qquad \text{(II.8)}$$

reprezintă valoarea*) unui drum critic de la vîrful 1 la vîrful *i,* fiind, date valorile de deasupra arcelor. Atunci

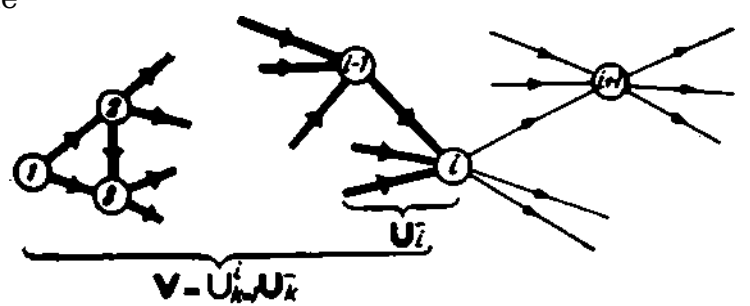
---

§§§§§§ **Vorbim de valoarea unui arc sau a unui drum mai curind decît despre lungimea sa. De fapt, în teoria grafurilor, lungimea unui drum este numărul de arce care constituie acest drum şi lungimea unui arc este, prin definiţie, egală cu 1. Aici valoarea unui arc înseamnă timpul operator.**

= E p (0 li (0 (II.9>

este valoare medie a drumului critic mergînd de la vîrful 1 la vîrful *i.* Dar valoarea l_t *(t)* nu depinde de valorile arcelor fasciculelor

pentru că nici un drum de la 1 la *i* nu utilizează vreunul din arcele



(11.11)

Fig. II.9

$$p\,(/,) = \mathrm{P}(<_{\mathrm{rf}}) \bullet p\,(\mathrm{tf}_2\text{-}) \text{ --}.p$$

Dacă t_{ak} este valoarea aleatoare a $a._k$ al fasciculului (fig- n.3),

lor. Dacă se notează V reuniunea mulţimilor L\ , U? U, (fig. II.4)

$$\mathbf{v = \underset{»=i}{uur},} \qquad \mathbf{(n.io)}$$

şi (II.9) se poate scrie sub forma unde

(11.13)

iar valoarea medie a arcului a_t este

$$t\,ak = \underset{\text{'U}}{P\,(ţt\,\mathrm{f})\,tak} \bullet \qquad \text{(II-}$$

în 2.7 s-a calculat o aproximare a valorii medii a drumului critic de la vîrful 1 la vîrful *i* prin :

$$g_i = \max(?l + *!!\bullet\bullet\bullet? \; g_{i-l} + \hat{}i\text{-}1)" \tag{11.15}$$

Aici presupunem pentru a simplifica notaţiile, că mulţimea Uf constă din arce care pleacă din vîrfurile 1,2,..., **în *i* către interior, şi că aceste arce sînt numerotate 1, 2,.. *i* — 1 respectiv (fig. II.5). Dacă arcul *k* nu există, nu se ţine s** şi

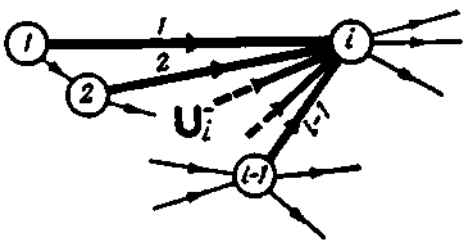


Fig. II.5.

incidente , i - 1 ima de

Îk -f- t_k, sau se înlocuieşte t_k cu — oo, ceea ce revine la acelaşi lucru • n acest calcul s-a presupus implicit că drumul critic nu se schimbă (este constituit din aceleaşi arce), oricare ar fi valorile aleatoare ale arcelor grafului.

II.2. APROXIMAŢIAA VALORII UNUI DRUM CRITIC

Vom descrie acum un calcul analog cu (11.15), dar puţin mai complex, care permite o aproximaţie mai bună a valorii medii a drumurilor critice.

Să definim prin :

$_{fi} = 0$

.... (11.16) $fi = £ P$ (hi-) max (A + «!,..., fi-$_k$ + i = 1, 2, .. . n,

unde ca în (11.15)

= (tj; t_2, . . . , tj-j),

p (tu-) fiind repartiţia vectorului timp operator *tq-*.

Să ilustrăm formulele (11.15) şi (11.16) printr-un exemplu numeric. Fie graful din fig. II.6 şi să presupunem că valorile fiecărui arc sînt 0 şi 1, fiecare cu probabilitatea egală cu 1/2.

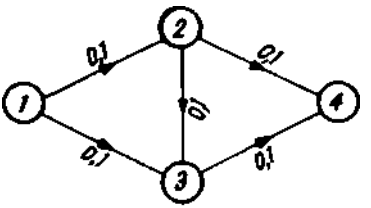


Fig. II.6

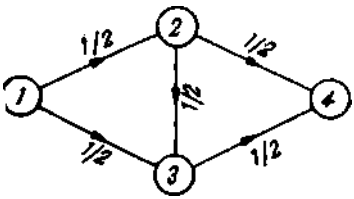


Fig.

Să aplicăm formula (11.15). Se obţine (fig. II.7)

$g_i = 0$

$$g_2 = \frac{}{2}$$

$$g_3 = 1$$

$$g_4 = \frac{3}{2}$$

Aplicînd formula (11.16), avem

Ă = 0.

fi = — (fi + °) +~ (fi + !) = ~,

$$f_3 = \max(f_1 + 0, f_2 + 0) + 4^{m}\text{aî}(i + 0, f_2 + 1) +$$

$$\text{H}— \max(j + 1, f_2 + \quad \max(y_x + 1, f_2 + 1) =$$

$$f_{i+1} = \max_{4}(f_2 + 0, f_3 + 0) + \max_{4}(f_2 + 0, f_3 + 1) +$$

$$+ \max_{4}(f_a + 1, f_3 + 0) + \max_{4}(f_2 + 1, f_3 + 1) =$$

$$= \frac{i(\pm + Ji + 2 + in}{4\ I\ 8 \quad 8 \quad 2 \quad 8\ /\ \ 32}$$

Se observă că $g_i < f <$-

Să arătăm că, în general, într-un graf PEET inegalităţile

$$Si < fi < h, i = 1, 2, \ldots, n,$$ sînt satisfăcute.

Vom aplica metoda recurenţei. Să arătăm mai întîi că

$$3i+i\ fi+r \qquad (11.18)$$

Punînd

$$U = _U,-_{+1} = [1, 2, \qquad (11.19)$$

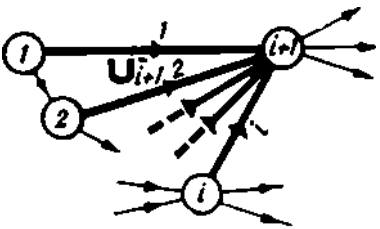


Fig. II.8

avem (fig. II. 8)

$$/i+i = X^{\max}_{'u}(A + \quad '\bullet\ \bullet\ \bullet\ 'fi + \qquad (11.20)$$

sau

$$f_{i+}i = £\ \max IXlB)\ (fj + ^\ldots^(toHfi + /<)],$$

(11.21)

$$f_{i+1} > \max [\ £_{p\ (t.)\ +\ tf),} \qquad (t.)\ (f_{t\ +\ <,)}]. \qquad (11.2$$

n,

Deoarece . ,/< nu depind de *tu :*

$$A+i > \max (/, + t_n .. .,fi + t_f). \qquad (11.23)$$

Inegalitatea (11.18) fiind adevărată pentru avem

$$y_{i+1} > \max (\& + «i, \bullet \bullet - , ?< + t«) = 0_{<+}i \qquad (11.2$$

după (11.15), ceea ce demonstrează relaţia (11.18). Să arătăm acum că

$$e_{i+1} \geqslant f_i \qquad (II.25$$

Pentru aceasta să punem

$$W_{=U}Ur, \text{ şi } U = Ur_{+1} = \{1,2,$$

$$(11.26)$$

1-1 **fc-1**

(a se vedea figurile II.4, II.8 şi II.9).

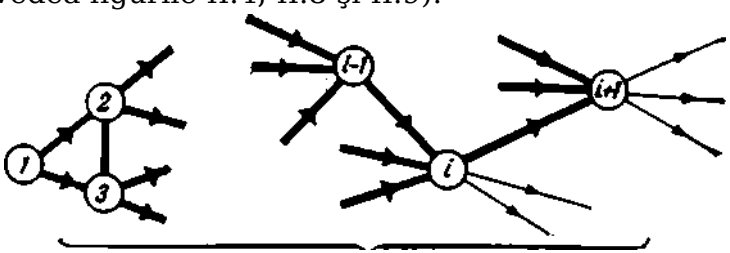


Fig. II.4

Din **K** xpresiile (II.11) şi (11.12) şi din relaţia

$$l+i (tw) = {}^{max} El (M + <i ,\bullet \bullet \bullet, 1 (tv) + 11 \qquad (11.27)$$

se obţine

$$«i+l = £ \boldsymbol{P} (tw) l+i (tw) =$$

$$= Y_P \; W \, E^{\,p} \; W^{max} \; \& \; +1' \bullet \bullet \bullet {}'^{li} ('*) + u ({}^{n}\text{-}^{28}) \text{ sau}$$

$$e_{i+}i = x \, P \, (M \, £ \max \{p \, (t_¥) \, [«! \, (<v) + ij], \ldots, p \, (tv) \, [l_4 \, (<v) + tj\}. \; 'U \quad 'V$$

(11.29)

Rezultă că

$$e_{i+}i > \max_{<u} IE_P(M[*i <^{<v>} + AL \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet ; £p(M[A(M + A3 \quad (11.30)$$

Folosind din nou (II.11), obţinem

$$^{C}i+1> S\ p(to)\max[ei + \quad , e_t + tj. \quad (11.31)$$

Inegalitatea (11.25) fiind adevărată pînă la *i* şi folosind (11.16), avem

$$®i+i > £\ P\ (M\ \max\ LA + t_{lt}.. .,fi + tj = /_{i+1}. \quad (11.32)$$

Această relaţie verifică (11.25) şi demonstrează (11.17).

Trebuie să observăm că inegalităţile g_t l_t, sînt valabile fie că fasciculele sînt independente sau nu. Dimpotrivă, ipoteza de independenţă între fascicule este esenţială pentru (11.17).

II.3. CÎTEVA EXEMPLE NUMERICE

în acest paragraf prezentăm cîteva exemple numerice pentru a compara pe g_n, f_n şi e_n. în fiecare dintre aceste exemple am presupus aceeaşi repartiţie uniformă pentru fiecare arc şi independenţa între arce.

Numerele situate pe arce sînt valorile pe care le poate lua timpul operator corespunzător. Pentru exemplele 2 şi 3, calculele au fost efectuate de un calculator electronic.

Exemplul 1 (fig. II.10)

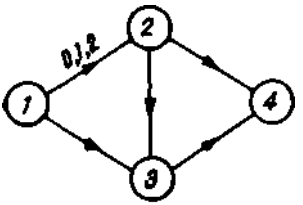


Fig. II.10

= 3,00, /4 = 3,22, e4 = 3.32.

Distribuţia valorilor drumului critic

>4	0	1	2	3	4	5	6
Frecvenţa	1	11	50	74	71	27	9

Exemplul 2 (fig.

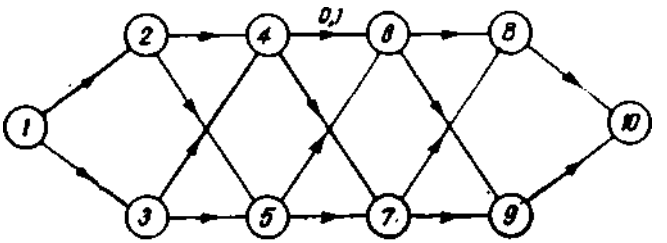


Fig. II.11

3io — 2,50, f_{10} — 3,50, e_{10} — 3,95.

Exemplul 3 (fig. 11.12)

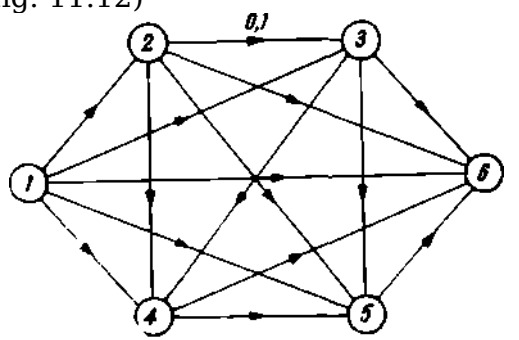


Fig. II.12

3e — 2,50, f_6 — 2,92, e_e — 2,95.

Din aceste trei exemple se constată că aproximaţia *f* este mai bună decît aproximaţia *g.*

SUBDIVIZIUNEA OPERAŢIILOR ŞI REALIZAREA UNUI CALENDAR*)

în această anexă vom înfăţişa efectele subdiviziunii operaţiilor asupra probabilităţii de realizare a unui calendar prestabilit. Mai prcis, problema tratată în această anexă este următoarea :

Fiind dată o activitate sau un şir de activităţi care se termină cu un eveniment cu o dată fixată, să se determine efectul subdiviziunii unei activităţi (sau a mai multora) asupra probabilităţii calculate de realizare a evenimentului la data indicată.

Se presupune că o operaţie, pentru care s-au stabilit estimaţiile optimistă, cea mai probabilă şi pesimistă ale timpului operator, *a, m* şi *b,* respectiv, este divizată în *n* subactivităţi, conectate în serie, cu estimaţiile optimistă, cea mai probabilă şi pesimistă a;, wij şi *b,* ale timpului operator, unde *i* = 1,2,. . ,,*n.*

Se mai presupune că

$$\pounds a, = a, \quad \pounds b_k = b, \qquad \text{(III.l)}$$

şi că timpii operatori ai subactivităţilor sînt variabile aleatoare independente :

$$\mathrm{d} =$$

unde

$$\mathrm{d} = b - a \text{ şi } \mathrm{d}, = b_t - a_t, \; i = 1,. \; . \; n.$$

Utilizînd ecuaţiile repartiţiei |3, referitoare la valoarea medie şi la dispersia timpului operator, avem pentru activitatea originală,

♦) **Aceasta expunere este extrasă din articolul [10].**

înaintea subdiviziunii :

$$V(t) = [-(b - a)]^2 = d^2/3C>.$$

$$E(t) = \frac{}{6}(a + 4m+b), \qquad \text{(III.3a)}$$

6

După subdiviziune, avem : (III.3b)

$$E_a(t) = \sum_{t=1} 2?(t.) = \sum_{\&\, i=L} A(_{flj} + 4 \quad + b_t)$$

$$F_{<=t} W - t\ v\ W = \sum_{<-11_^6} [A(6 - a,)]^2 = dt$$

Se vede că

$$= \frac{}{h}(a + 4m + \qquad \text{(III.4a)}$$

$$E(t) = E_a(t).$$

Ecuaţia (III.3b) se poate scrie (III.4b)

Deoarece 0 pentru orice *i,* o comparaţie între şi (III.5) arată că

$$V(t) > V_n(t).$$

Neconsiderînd decît cazurile de nedegenerare, scriem (III.5)

(III.4b)

în metoda PERT probabilitatea de realizare a unui eveniment înainte de (sau la) data fixată în calendarul *T„* se obţine calculînd

$$v = \frac{T_s - E(T)}{KV(!C)} \qquad \text{(III.7a)}$$

unde *E(T)* şi *V(T)* sînt respectiv valoarea medie şi dispersia datei evenimentului luate din tabela legii normale (Gauss-Laplace) reduse, în această anexă, *t* reprezintă timpul operator al unei operaţii şi *T* este data de realizare efectivă a unui eveniment, *T,* fiind data prevăzută în calendar,

e-4-d. (III.

Să presupunem acum că activitatea care a fost divizată se găseşte pe drumul folosit pentru calcularea lui *E(T)* şi *V(T).* Putem presupune de altfel că activitatea sudivizată este prima. Dacă *V(t)* este dispersia timpului operator al primei operaţii, înaintea subdiviziunii, şi u^2 este suma dispersiilor corespunzătoare operaţiilor următoare pe acest

$$V(T) = V(t) + \qquad \text{(III.8)}$$

Din ecuaţiile (III, 7 a) şi (III.8) se

$$\frac{Ts \sim E(t)}{V\,V(0 +} \qquad \text{(III.9a}$$

înainte de subdiviziunea primei

$$y'' \sim V\,Vn(0 + \frac{T_s - E(t)}{} \qquad \text{(III.9b}$$

după

Din ecuaţiile (III.6b) şi (III.9) se deduce:

$$|y_{„}|>|y| \qquad \text{(in.io)}$$

şi sînt posibile trei cazuri:

— pentru $T_s > E(T)$, probabilitatea de a îndeplini evenimentul înainte de (sau la) data calendarului va creşte;

— pentru $T_s < E(T)$, probabilitatea va scădea;

— pentru $T_s = E(T)$, această probabilitate nu se va schimba. Ecuaţiile (III.7) arată că probabilitatea poate fi afectată prin

schimbările lui $T_S, E(T)$ sau $V(T)$.

Să considerăm, mai întîi, numai schimbările lui F(T) şi mai precis, schimbarea lui $V(T)$ rezultând din subdiviziunea primei operaţii. Dispersia timpului operator, după subdiviziune, este

Suma se poate scrie

$$\text{£dî} = \text{£ tod)'} = d^2\text{£ tf,} \qquad \text{(uni)}$$
$$i\text{“}1 \qquad i = 1 \qquad i = 1$$

cu Q < < 1 pentru toţi i şi

$$\text{£} \qquad = 1. \qquad \text{(III.12)}$$
$$i\text{-}1$$

Derivînd şi utilizînd metoda lui Lagrange, se vede uşor că pentru o diviziune în n subactivităţi, = — ♦ i — 1,2,.. . ,n, minimizează n

expresia (III.11) supusă la (III.12). Atunci

$$\min V_n(t) = \frac{1}{36} d^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{36} \frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{n}}$$

Pentru a găsi maximul dispersiei, pentru o diviziune în n subactivităţi, se presupune că diferenţele b — a pentru

operaţia originală

şi pentru subactivităţi au valori întregi. Această restricţie nu pare prea severă cînd unitatea de timp este săptămîna sau ziua. Această diferenţă fiind d înaintea subdiviziunii, se divizează operaţia în două subactivităţi pentru care diferenţele — a_f sînt respectiv d—1 şi 1. Gonsiderînd curba/(a?) = x^2, este clar că acestei subdiviziuni particulare îi corespunde dispersia cea mai mare. De asemenea, subdiviziunii în trei activităţi, pentru care diferenţele b_t — a_4 sînt respectiv d — 2, 1 şi 1, îi corespunde cea mai mare dispersie. Continuînd cu acest argument euristic, se ajunge la concluzia că dispersia maximală, pentru o diviziune în n subactivităţi este

$$\max V_{„} (t) = [(d — n + l)^2 4\text{-} (n — 1)] =$$

$$= — [d^2 + (2 d — n) (n — 1)] \quad \text{(III.14}$$

cu restricţia implicită $n < d$, care nu pare prea severă.

Ecuaţiile (III.13) şi (III.14) dau deci marginile inferioară şi superioară pentru dispersia V_n (t) a unei diviziu ni în n subactivităţi:

$$\frac{[d^2 - (2d - n)(n - 1)]}{36n} \quad \text{(III.15}$$

Marginile lui $V_{„}(l)IV (t)$ sînt

$$\frac{1}{n} \frac{Vn(0}{V(I)} \qquad - \frac{(2d - n)(n - 1)}{d^2} \quad \text{(III.16}$$

Fig. III. 1 dă reprezentarea ecuaţiei (III.16) pentru diferite valori ale lui d şi n.

Să ilustrăm efectul subdiviziunii unei activităţi (sau a mai multora) prin exemplul următor:

a) Să presupunem că într-un graf de program există 100

activităţi, fiecare cu o dispersie a timpului operator de 6,25 (adică d =15), pe drumul critic ducînd la obiectivul final şi că

$$T_s - E\,(\mathrm{T}) = — 13.$$

Atunci pentru *V (T) = 625,* se deduce din ecuaţia (III.7) :

$$P(T < T_s) = 0{,}30.$$

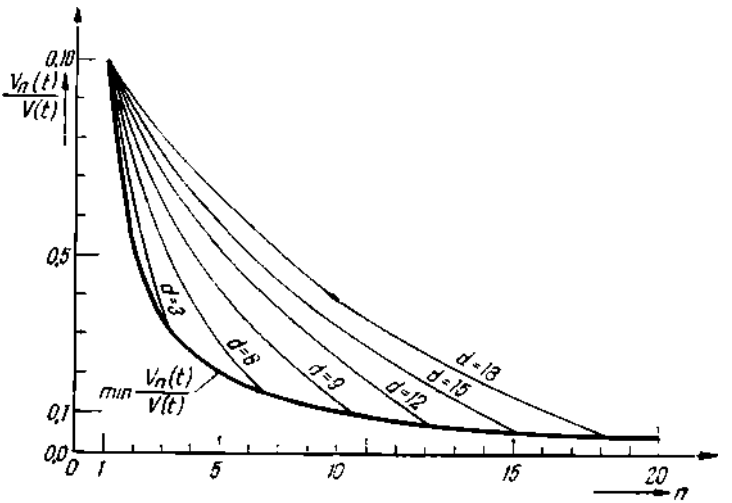


Fig. III.1

b) Să presupunem acum că: 1) fiecare din cele 100 operaţii este subdivizată în trei subactivităţi, răspunzînd condiţiilor (III.l), ceea ce dă un total de 300 activităţi pe drumul critic şi 2) T_s şi *E(T)* rămîn neschimbate ; atunci se deduce din ecuaţia (III.16) :

$$208{,}125 < y_3\,(T) < 475$$

şi din ecuaţia (III.7) :

$$0{,}18 < P(T < T_s) < 0{,}27.$$

c) Dacă operaţiile sînt subdivizate în şase subactivităţi, avem

Dacă în exemplul precedent data fixată în calendar T_s era posterioară datei aşteptate, de exemplu, T_s — $E(T)$ = 4-13, atunci, din cauza simetriei repartiţiei normale, probabilităţile corespunzătoare ar fi fost

a') P(T< T_s) = 0, 70;

b') 0,73 < P (T < T_s) < 0,82 ; c') 0,78 < P (T < T_s)< 0,90.

Efectele subdiviziunii activităţilor pot fi ilustrate căutînd, cînd V(T) se schimbă, noua dată T_s, astfel încît probabilitatea de realizare să rămînă neschimbată. Se presupune atunci că $E(T)$ este fixată şi se permite variaţia lui T_s. Probabilitatea de realizare a unui eveniment înainte de (sau la) data fixată în calendar este

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(T_S - T_E)/\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \qquad \text{(III.17)}$$

unde $T_E = E(T)$ şi a = yV(T) este abaterea tip. Să diferenţiem :

$$\frac{}{a^2} \qquad A\ T_s - \frac{Aa(r}{}j \frac{\sim rg)}{a} \qquad j. \text{ (III.18)}$$

Scriind că dP = 0 în ecuaţia (III.18), se obţine

$$A7_5 = (T_S - P_£) —\bullet_{o} \qquad \text{(III.19)}$$

Pentru a ilustra schimbarea efectuată asupra lui T_s, să reluăm exemplul precedent:

a) Dacă fiecare din cele 100 de operaţii este subdivizată în trei subactivităţi,

— 10,57 < A a C — 3,21

şi ecuaţia (III.19) dă

1,67 5,50.

Astfel, data ce figurează în calendar va putea fi deplasată cel puţin cu 1,67 şi cel mult cu 5,50 unităţi de timp, menţinînd

$$P\,(T < T_s) = 0{,}30.$$

(b) Dacă fiecare din cele 100 activităţi este subdivizată în şase subactivităţi, atunci

$$-13{,}82 < Au < -6{,}36$$

Şi

$$3{,}31\ AT_S < 7{,}19.$$

Astfel, data fixată în calendar va putea fi deplasată cel puţin cu 3,31 şi cel mult cu 7,19 unităţi de timp, menţinînd

$$P(T < T_g) = 0{,}30.$$

în sfîrşit, diferenţiala totală a expresiei (III.17) este

$$dP = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{1}{2} \frac{T_g)^2}{} \right\} \left[\Delta T_s - \Delta T_g - (T_s - T_g) \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \right]. \qquad \text{(III.20}$$

Această ecuaţie (III.20) poate fi utilizată pentru evaluarea efectului asupra probabilităţii calculate de realizare a schimbărilor uneia (sau a mai multora) dintre cantităţile T_s, T_s şi a.

IV

APLICAREA METODEI POTENŢIALELOR******* †††††††)

******* **Textul din această anexă, introdus In ediţia spaniolă a acestei lucrări, se datorează Iui R. Companys, M. Marţi şl J. M. Vegara.**

††††††† ***Les Prob limes d'ordonnancemept,*** **AFIRO, DUNOD, 1964, pag. 7.**

în această anexă vom relua exemplul lui Pacaud, expus în 2.6, tratîndu-l cu ajutorul sistemului de reprezentare prin sarcini şi restricţii, ceea ce ne va da ocazia să expunem algoritmul lui B. Roy, prezentat în articolul [12],

Ca punct de plecare se va utiliza tabelul IV. 1, unde în coloanele 1, 2, 3, 4, 5 şi 6 a fost condensată toată informaţia disponibilă asupra sarcinilor necesare pentru a duce la bun sfîrşit proiectul; coloanele 7, 8 şi 9 indică rezultatele obţinute prin aplicarea algoritmului.

Cititorul va observa că datele disponibile se referă la două aspecte — ordinea logică de succesiune a operaţiilor (sarcinilor) şi duratele acestora — pe care metodele de programare expuse în această carte permit să fie considerate independent unul de celălalt. Lucrînd cu toată rigoarea nu este totuşi necesar să desenăm graful programului pentru a determina drumul critic; s-a dovedit însă util să facem acest lucru pentru a da o imagine vizuală proiectului (interdependenţe existente, ...). Cititorul îşi va aminti că în metoda PERT existenţa posibilă a operaţiilor virtuale obligă, dimpotrivă, să trasăm graful înaintea începerii calculelor.

Figura IV.l reprezintă graful corespunzător exemplului tratat; este util să subliniem că restricţiile existente în acest program sînt astfel încît valorile afectate arcelor corespund duratelor sarcinilor, adică un arc unind vîrful *i* cu vîrful *j* sau cu vîrful *m,...* are ca valoare durata sarcinii *i*; aceste restricţii constituie un tip particular a aceea ce B. Roy numeşte restricţii „potenţiale” *•) care pot fi toate reprezentate prin sistemul sarcini-restricţii.

începerea lucrărilor		*D*
Studiu instalaţii de Încălzire	încălzire	*a*
Studiu acoperiş	Acoperiş	*b*
Studiu şarpantă metalică	Şarpantă metalică	*c*
Studiu beton armat	Zidărie	*d*
Terasamente generale	Terasame	*e*
Amplasare, instalaţii santier	Zidărie	*f*
Terasamente fundatii	Terasame	*g*
Fundaţii beton	Zidărie	*h*
Terasamente grinzi	Terasame	*i*
Grinzi beton	Zidărie	*i*
Construcţie In atelier	Şarpantă metalic	*k*
Strat protecţie de zugrăveli	Zugrăveli	*l*
Transportul sarpantei	Sarpantă metalic	*m*
Montajul şarpantei	Şarpantă metalică	*n*
Montajul instalaţiei de	încălzire	*r*
Zugrăveală (alte straturi)	Zugrăveal	*s*
Studiul instalatiilor electrice	Electricita	*t*
Izolaţii acoperiş	Acoperiş	u
Montaj instalaţii electrice	Electricita	*v*
Pardoseală cu dale	Zidărie	*U)*
Tencuirea pereţilor de	Zidărie	*x*
Sfirşitul lucrărilor	—	*F*

(1)	(2)	(3)
Denumirea sarcinilor	Lucrarea	Nomen-clatura

Sarcini precedente	Sarcini următoare	Durata	'i	*	Drum critic
	a,b,e	0	0	0	*D**
D	*c,t*	10	0	0	*a**
D	*c,l*	3	0	7	*b*
a,b	*d,k*	15	10	10	*c**
c	*f*	10	25	45	*d*
D	*f*	15	0	40	*e*
d,e	*g,i*	5	35	55	*f*
f	*h*	30	40	60	*g*
g	*n*	20	70	90	*h*
f	*j*	4	40	88	*i*
i	*TI*	18	44	92	
c	*l*	60	25	25	*k**
k	*m*	20	85	85	*l**
l	*n*	5	105	105	*m**
	r,tv,x	25	110	110	*n**
n	*s*	35	135	135	*r**
r	*u*	40	170	170	*s**
a, b	*V*	2	228	228	*t*
s	*V*	20	210	210	*u**
t, u	*F*	20	230	230	*V**
n	*F*	35	135	215	*IV*
n	*F*	35	135	195	*X*
V_tlV, X		0	250	250	*F**
(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)

Tabelul IV.l.

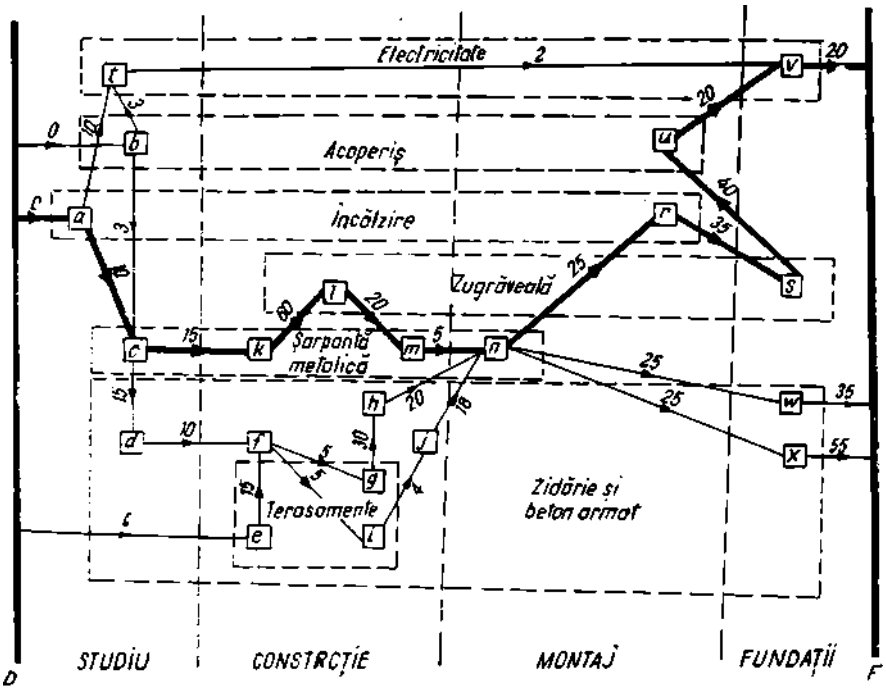


Fig. IV. 1

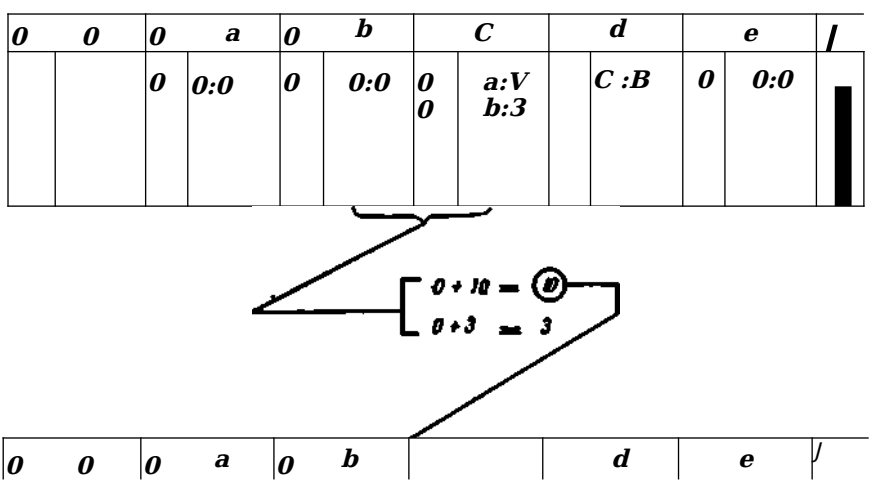
Dispoziţia relativă a vîrfurilor în graf nu are alt scop decît să uşureze înţelegerea programului, grupînd sarcinile după un criteriu logic. în exemplu nostru, am grupat sarcinile după felul lu - crării şi după fazele de desfăşurare ale proiectului: studii, construcţie, montaj şi finisare; această dispunere va uşura ulterior o subdiviziune a sarcinilor figurînd în fiecare grupare. Informaţia conţinută în coloanele 3, 4 şi 6 din tabelul IV.l permite stabilirea tabelului IV.2, cu ajutorul căruia se va aplica algoritmul pentru obţinerea datei celei mai apropiate a pornirii fiecărei sarcini. De fapt acest al doilea tabel reia datele furnizate de primul, prezentîndu-le diferit pentru a simplifica calculul. Prima linie reprezintă lista sarcinilor corespunzătoare vîrfurilor grafului; dedesubtul fiecăreia dintre aceste sarcin i

s-au notat cele care o preced imediat cu duratele lor. în sfîrşit s-au aranjat subcoloanele a căror motivare va fi explicată mai departe.

Se atribuie lui *D* — începerea lucrărilor — data 0 şi se scrie această cifră la stînga lui *D,* care se află în capul primei coloane, la fel ca în subcoloanele alăturate celorlalţi *D* care figurează în acest tabel. Apoi se caută o coloană care să fie completă, adică care să posede tot atîtea elemente în subcoloană, cît şi în coloană; se efectuează atunci suma cantităţilor fiecărei linii şi se păstrează suma maximală care se scrie în capul coloanei, la stînga literei care reprezintă o sarcină a programului.

Se repetă acest proces sistematic. Valorile găsite, o dată scrise în capul coloanelor, sînt reproduse în subcoloane alături de literele corespunzătoare, ceea ce permite să se completeze subcoloanele şi să se determine noile coloane.

în final se va putea scrie un număr alături de litera *F,* indicînd sfîrşitul lucrărilor. înţelegerea algoritmului este facilitată de fig. IV. 2, în timp ce rezultatul final este indicat în tabelul IV. 3.



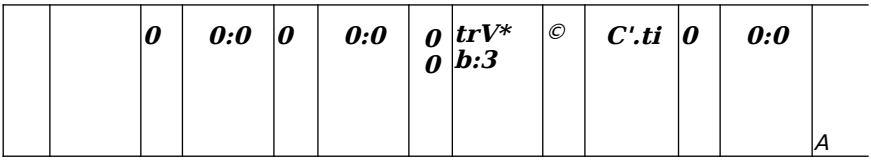


Fig. IV.2

Acest algoritm conduce întotdeauna la soluţia problemei, cu excepţia cazului cînd există circuite în program; această eventualitate nu este luată în consideraţie, deoarece corespunde unei erori de logică în descrierea proiectului.

în anumite programe foarte complexe se poate întîmpla ca într-o primă dispunere să existe astfel de circuite care vor fi detectate de algoritm, deoarece se ajunge la o situaţie unde acesta se blochează, fără a se fi obţinut data terminală a programului. Există, de altfel, alţi algoritmi *) care permit detectarea circuitelor unui graf.

Algortimul prezentat aici posedă avantajul de a nu necesita enumerarea succesivă a vîrfurilor grafului; el conduce de asemenea la o aplicare manuală simplă şi cu ajutorul lui se pot rezolva probleme cu un număr destul de mare de vîrfuri sau sarcini.

în exemplu nostru, sfîrşitul lucrărilor sau al proiectului va avea loc, cel mai curînd, la data 250.

Pentru a determina datele cele mai tîrzii de punere în execuţie a diferitelor sarcini, se construieşte un nou tabel IV.4, unde se consideră sarcinile care urmează imediat celor aşezate în capul coloanelor. Alături de litera *F* se scrie valoarea, calculată mai înainte, a datei de realizare a proiectului, adică 250, şi se aplică acelaşi algoritm schimbînd numai cuvintele sumă prin diferenţă şi maximal prin minimal. Aceasta permite obţinerea tabelului IV.5, unde în cap, alături de fiecare literă reprezentînd o sarcină, este notată data t/ corespunzătoare.

Sarcinile ale căror date cele mai apropiate şi cele mai tîrzii coincid (sarcini critice) sînt notate cu un asterisc în coloana 9 a tabelului IV.l; urmărirea lor constituie, după cum se ştie, drumul critic. Calculul diferitelor margini se poate efectua de asemenea fără dificultăţi, permiţînd astfel să se completeze informaţia deja obţinută.

♦) ***Recherche des chemins et circuits Hamiltoniens d'un graphe,*** **Revue Franfaise de Recherche Opirationnelle, nr. 26, pag. 61 — 73.**

D	a	b	c	d	e	f	9	h	t	j
D:0	D-. O 10 3	ia : |b :	c: 15	D:0	d: 10 ie: 15 |	|f: 5	g:3 0	f: 5 j		i

0 D	0 a	0 b	10 c	25 d	1 C e	35 f	40 g	70 h	40 1	44 j	25 *	85
0	D : 0 0	D : 0	0 0	a :10 | | |

Tabelul IV. 2

k	Z	*m*	n	*r*	s	*t*	u	*V*	*IV*	1 i	*x*	1	*F*
c: 15	*k* 6 0	: 20	*h:* 2 0 *j-* 1 8 *m* 5	*n* : 25	*r :* 35	*a :* 10 *b:3*	s: 40	*t:* 2 *u* :2 0	*n* : 25	n: 25			*V-.2 0* *W :3 5* *X-.5 5*

Tabelul IV. 3

)5 *m*	11 0	n	135	17 0	s	1 0	1 210 *u*	230 *v*	153 *IV*	13 5	*x*	250	*F*
l :20	70 44 10	*h:* 20 *j :* 1 8 *m* :	11 0	n 25	13 5	*r* :3 5	0 0	*a* :1 0 *b:3*	17 0	*s* :4 0	i 10 *t:2* 210 u:20	11 0	n:2 5	11 0	n:2 5	230 135 135	*V* :2 0 W:3 5 *X* :5

Tabelul IV. 4

k	*l*	*m*	n	*r*	5	*t*	u	p	*w*	i 1	*F*
60	*m* :20	*n* 5	*x* :25 *iv* :25 r:25	*s* :35	*u* :40	*w.2*	*D* -.20	*F-.20*	*F* :35	*F* :5 5 i	

Tabelul IV. 5

85	*m* 105	n 110	r 135	s 170	*t* 228	*u* 210	*a* 230	*w* 215	x 195	*F* 250
•20 105	n: 5 110	*x* :2 5 *u>* : 25 r:25 195 215 135	s:3 5 170	u :4 0 210	*v :* 2 230	*v* :2 00 230	*F:* 20 250	F:3 5 250	F:55	250

Este evident că din lipsă de spaţiu nu putem cita toate articolele publicate despre sistemul PERT. Dăm aici numai articolele de bază pe care le-am utilizat la redactarea acestei broşuri şi pe care cititorul le va putea consulta cu interes.

Cărţi

[I] BEHGE, C. *Teoria grafurilor şi aplicaţiile ei* (trad. din 1. franceză). Bucureşti, Editura tehnică, 1969.

|2] KAUFMANN, A., CRUON, R. *La programmation dynamique.* Dunod, 1965.

[3] KAUFMANN, A. *Metode şi modele ale cercetării operaţionale* (trad.din 1. franceză). Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1967.

Aceste lucrări nu se referă la metoda drumului critic, dar in ele se vor găsi diferite elemente ale teoriei grafurilor şi ale programării dinamice care slnt utilizate in mai multe paragrafe din această carte.

Articole

***Capitolul* 2**

[4] P.E.R.T., Pliase I & II. Summary Report, Special Projects Office. Dept of Navy, Washington D. C.

[5] MALCOLM, D. G., ROSEBOOM, J. H., CLARK, C. E., FAZAR, W. Application of a Technique for Research and Development Program Evalualion, Operations Re- search, 7, 5, 1959.

[6] FUCHS, C. Une măthode d'Analyse et d'ăvaluation des programmes : le P.E.R.T., Ghefs d'Entreprise, 1962, A. Ftude Centre Franţais de R.O., P.E.R.T., 12/61. Aceste trei articole sint articolele de bază pentru capitolul 2. Se va putea consulta oricare din cele trei.

[7] GRUBBS, Frank E. Attempts to validate certain P.E.R.T. statistics or «picking on P.E.R.T. •. Opns. Res., 10, 6, 1962.

[8] CLARE, Charles E., « The P.E.R.T. model for distribution of an activity time» Opns. Res., 10, 3, 1962.

Articolele [7] şi [8] dau precizări asupra repartiţiei |J utilizate în sistemul PERT.

[9] FULKERSON D. R., Expected criticai path lengths in P.E.R.T.networks, Opns. Res., 10, 6, 1962.

[10] HEALY, Thomas L. Activity Subdivision and P.E.R.T. probability statements Opns. Res., 9, 3, 1961.

[II] VENTUBA, E. Impressions sur Ies tendances actuelles de la Recherche opdrationnelle aux U.S.A., Revue Franţaise de Recherche opărationnelle *(SOFRO),* 25.

[12] ROY, B. *Graphes et Ordonnancements. SOFRO,* 23.

Articolele [11] şi [12] reprezintă o bună introducere în metoda PERT.

[13] ROY, B. Contribution de la thiorie des graphes ă l'ătude des problămes d'ordon- nancement. 2e Confirence Internaţionale sur la R.O., Aix-en-Provence, 1960.

[14] ROY, B., Contribution de la thiorie des graphes ă l'6tude de certains problfcmes- liniaires. C. R. Acad. Sciences, T. 248, p. 2.437, 1959.

,15] ROY, B., Cheminement et connexiU dans Ies graphes. Application aux problfemes- d'ordonnancement. METRA, sdrie speciale, n° 1, 1962.
[16] ROY, B., SIMONNABD, M. «Nouvelle măthode permettant d'explorer un ensemble des possibilitis et de diterminer un optimum ». Revue Franţaise de Recherche opârationnelle, n 18.
[17] ALGAN, M., ROY, B., SIMONNABD, M. Principe d'une mithode d'exploration de certains domaines et application ă l'ordonnancement de la construction des grands ensembles. Cahiers du Centre de Mathdmatiques et de Statistique appliquies aux Sciences sociales. Ed. Institut Solvay, Bruxelles, 3, (1962), p. 41.
Articolele [13] — [17] vor permite cititorului să aprofundeze aşa-zisa metodă a potenţialelor de care am vorbit la sfirşitul capitolului 2.

Capitolul 3
[18] EISNER, HOWARD. A generalized network approach to the planning and scheduling. of a research project. Opns. Res. 10, 1.
[19] Information Scientifique Bull, La programmation dynamique, par A. KAUFMANN.

Capitolul 4
[20] CABB£. M^thode du Chemin Critique. Service Technologie Shell. Petit Couronne, Rouen.
[21] KELLEY, JAMES E. Criticai Path planning and Scheduling — Mathematical Basis,.
Opns, Rs., 9, 3, 1961.
[22] KELLEY, JAMES E. Jr., & MORGAN, R. Walker. Criticai Path Planning and Scheduling, 1959. Proceeding of the Eastern Joint computer conference, p. 160 — 173.
[23] FULKERSON. D. R. A Network Flow computation for project cost curves.
— Rând Paper, P — 1947, 1960.
— Management Science, 1961
[24] BILDSON, R. A., GILLEPSIE, J. R. „Criticai Path planning. P.E.R.T. integration".. Opns. Res. 10, 6, 1962.
Cititorul care doreşte o bibliografie foarte completă a articolelor americane apărute- despre metoda PERT va putea să consulte :
[25] BIGELOW, CLIFFORD GEORGE. „Bibliography on Projet Planning and Control by Network Analysis". 1959 — 1961. Opns. Res. 10, 5. 1962.

DICŢIONAR DE TERMENI FOLOSIŢI ÎN LUCRARE

***Metoda drumului critic* — (Măthode du chemin critique — Criticai Path Planning — Criticai Path Method)**
***PERT* — estimare şi revizuire a planurilor (Program Evaluation Research Task. Program Evaluation and Review Technique).**
***Opera[ii* — lucrări, activităţi (Opărations, jobs, tasks, activities): P_{it}.**
***Eveniment* — obiectiv (ăvănement, event):**
***Program* — (programme, program, planning).**
***Calendar* — (calendrier, schedule, scheduling).**
***Craf* — diagramă cu săgeţi (graphe, dirccted network, flow chart, linear graph).**
***Timp operator* — durata unei operaţii (temps opăratoire, job tome, duration of an acti- vity, elapsed time): t_{it}.**
***Timp operator mediu* — durata medie a unei operaţii (temps opăratoire moyen, expected elapsed time, mean time) : *t^*.**
***Interval de fluctuafie* — (intervalle de flottement, (floating time, slack).**
***Data aşteptată a unui eveniment* — data cea mai apropiată (date attendue d'un ăvănement; earliest time) : *1,*.**
***Data limită a unui eveniment* — data cea mai tlrzie (date limite d'un ăvănement, latcst time) :**
***Arc* — săgeată (arc, arrow).**
***Vtrf* — nod (sommet, node)**
***Drum* — (chemin path).**
***Durata minimală* — estimaţie optimistă (durăe minimale, optimistic time): a_v.**
***Durata maximală* — estimaţie pesimistă (durăe maximale, pesimistic time) : *b{,*.**
***Durata cea mai probabilă* — (dur^e la plus probable, more probable time): *m^*.**

CUPRINS

Cuvint înainte .....
***Prefaţă*.....**

1. GRAFURI DE ORDONANŢARE

1.1. Introducere.....
1.2. Noţiunea de grai.....
1.3. Relaţia de ordine strictă intr-un graf conex fără circuite.....
1.4. Descompunerea unui graf conex fără circuite in nivele.....
1.5. Găsirea unei ordonanţări.....

2. STABILIREA UNUI PROGRAM DE CERCETARE SAU DE PRODUCŢIE

2.1. Introducere .....
2.2. Reprezentarea unui program printr-un graf.....
2.3. Data realizării ansamblului de lucrări. Drumul critic .....
2.4. Intervale de fluctuaţie. Margini ale operaţiilor.....
2.5. Căutarea drumului critic. Algoritmii utilizaţi.....
2.6. Două exemple de aplicaţie.....
2.7. Operaţii cu durată aleatoare.....
2.8. Realizarea unui calendar .....
2.9. Utilizarea unui calculator electronic.....

3. GENERALIZAREA METODEI PERT

3.1. Introducere.....
3.2. Evenimente decizionale .....
3.3. Cîteva precizări asupra terminologiei folosite .....
3.4. Enumerarea evenimentelor terminale posibile.....
3.5. Probabilitatea evenimentelor terminale.....
3.6. Funcţia entropie .....
3.7. Metoda I'ERT generalizată.....

4. OPTIMIZAREA FUNCŢIEI ECONOMICE A COSTURILOR

4.1. Introducere .....
4.2. Unele consideraţii generale.....

4.3. Diminuarea costului total al unui program 108
4.4. Accelerarea unui program la cel mai mic cost..... 112
4.5. Variaţia arbitrară a costului operator în funcţie de...durată 116
4.6. Variaţia liniară a costului in funcţie de durată. Program liniar parametric. 118
4.7. Algoritmul lui Fulkerson 120
4.8. Detalii ale procedeului iterativ utilizat in algoritmullui Fulkerson . . . 121
4.9. Exemplu de aplicare a algoritmului lui.....Fulkerson 129
4.10. Program optimal..... 154
4.11. Optimizarea unui program cind duratele operaţiilor sînt aleatoare..... 155
Concluzii..... 161

A X E X E

I. Repartiţia P 166
II. Valoarea medie a unui drum critic intr-un graf de.....program 168
11.1. Ipoteze şi notaţii..... 168
11.2. Aproximaţia f_t a valorii unui drum critic..... 171
11.3. Citeva exemple numerice..... 175
III. Subsiviziunca operaţiilor şi realizarea unui.....calendar 177
IV. Aplicarea metodei potenţialelor 185
Bibliografie..... 192
Dicţionar de termeni folosiţi in lucrare..... 194

Bun de tipar 1.12.1971. Coli <le tipar 12,25. C.Z. 519.14

seria

BAZELE MATEMATICE ALE CERCETĂRII OPERAŢIONALE